

非等質な弾性平板における屈曲波のテンソル基底を用いた新しい定式化

加藤 初弘* 加藤 初儀†

* 山梨大学大学院医学工学総合研究部 † 苫小牧工業高等専門学校

概要. 非等質な弾性平板における屈曲波を、共変性、即ち、座標の回転に対する表現の不変性に注目して定式化した。テンソル基底を用いることで、共変性を明示的に表現することができ、弱形式理論に従った定式化、境界条件の一般的な表現の導出、エネルギー流束の定義を行うことができた。得られた理論は、平板の非等質性と角運動量を考慮して、Kirchhoff-Rayleigh 理論を拡張したものである。

A Novel Formulation of Flexural Waves on Inhomogeneous Elastic Plates Using Tensor Basis

Hatsuhiro Kato* Hatsuyoshi Kato†

*University of Yamanashi

†Tomakomai National Colledge of Techonology

Abstract. An extension on Kirchhoff-Rayleigh theory for inhomogeneous elastic plate is proposed with respect to the covariance of expressions under the coordinate rotation. The covariance is definitely expressed by tensor basis, which also enables to formulate flexural wave according to the weak form framework and to obtain a generalized expression of the boundary condition and the energy flux.

1. まえがき

等質な弾性平板の屈曲で生じる屈曲波は、多くの議論が積み重ねられた古典的な分野である [5, 7, 8, 15, 18]. この屈曲波を支配する 4 階の微分方程式は、固体中で弾性波が従う 2 階の微分方程式とは異なる取り扱いが必要なものの、数値計算を効率的に実施できる [16]. 一方、弾性定数や厚さが一様ではない非等質な弾性平板の屈曲波に対する議論は多くはなかった。しかし、最近では減衰機 [10], 導波路問題 [14, 19], 被覆効果 [3] などに関連して、議論が進展している。また、薄膜に対して弾性定数を制御する試み [17, 21] や波動特性の解析が行われており [1, 2], 非等質な弾性平板に関する研究の範囲が広がっている。

本論文の目的は、等方的ではあるが非等質な弾性平板における屈曲波の運動を、座標回

転に対する表現の不変性，即ち，共変性 [6] に注目して定式化することである．等質的な弾性平板の運動方程式では，座標軸の回転に対して対称な変形成分のみで方程式が記述されていたことから，共変性を意識する必要は必ずしもなかった．しかし，材料定数や厚さなどが位置に依存する非等質な弾性平板では，座標回転により互いに変換される 2 つの捩じり変形が運動方程式に現れる．従って，テンソルの基底を用いて座標回転に対する共変性を明示しつつ運動方程式を導出する必要があった．座標回転により互いに入れ代わる 2 つの捩じり成分は純曲げ (**pure bending**) により実現されること [18]，および，曲げモーメントが平板のヘッシアン (あるいは曲率テンソル) により表現できること [12] は既に知られている．しかし，回転変換による 2 つの捩じり変形の入れ代わり，および，座標回転による曲げモーメントの共変性を，テンソル基底を用いて明示的に表現する方法は著者が知る限り本論文で初めて行われる試みである．

三次元空間において弾性波の運動方程式が従う変換則を一般座標で論じた議論 [13] や，これを平板に応用した例 [3] があるが，ここでは次の理由から平板における屈曲運動を対象とする：(i) 屈曲波が従う運動方程式が 4 階の微分方程式であり，多くの議論がある 2 階の微分方程式とは異なる例である．(ii) テンソル基底の表現が簡潔であり見通しのよい定式化が可能である．(iii) 屈曲波に限定することで効率的な数値計算を実施できる可能性がある．

共変な屈曲波の運動方程式は，**Kirichhoff-Rayleigh** 理論の運動方程式 [5, 18] を拡張したものであり，ラプラシアン以外に 2 つの新しい演算を含んでいる．共変な定式化を用いると，弱形式理論 [4] に従った屈曲波の定式化を進めることができ，境界条件やエネルギー流束の導出を見通しよく行うことができる．得られた境界条件は，ベクトルとテンソルの内積で表現され共変性が明示されたもので，**Kirichhoff** の境界条件 [8] に角運動量の効果を含めた条件である．

本論文の構成は次の通りである．2 節では，非等質な弾性平板の屈曲変形を支配する運動方程式を，共変性を考慮しつつ導出する．3 節は，弱形式理論に従って弾性平板の運動を汎関数の停留値問題として記述するとともに，境界に沿った座標で境界条件を表現する方法を示す．さらに，薄い円盤の変形を有限要素法により解析した例を示す．4 節はまとめである．

2. 共変な運動表現

2.1 3 つの屈曲モード

弾性平板で使用される 2 階のテンソルは 2×2 行列で表現され，これらは線形空間を形成する．線形独立な 2×2 行列 $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\sigma}, \hat{\tau}, \hat{\nu}$ を

$$(2.1) \quad \hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

で定義すると、これらはテンソルが形成する線形空間の基底である。さらに、 $\hat{1}$ 以外の異なる基底同士の積は反交換測に従い、代数法則 $-\hat{\sigma}^2 = \hat{\tau}^2 = \hat{\nu}^2 = \hat{1}$, $\hat{\sigma}\hat{\tau} = \hat{\nu}$, $\hat{\tau}\hat{\nu} = -\hat{\sigma}$, $\hat{\nu}\hat{\sigma} = \hat{\tau}$ を満たす。任意のテンソルを行列で表現した量を X, Y とするとき、それらの内積 $\langle X, Y \rangle$ を $\langle X, Y \rangle = \text{tr}[X^T Y]$ で定義する。ここで、 T は行列の転置を意味する。 $\hat{1}$ 以外の基底はそのトレースがゼロであるので、異なる2つの基底の内積を取るとゼロになる。また、各基底の自分自身との内積の値が2であることから、基底 $\hat{1}, \hat{\sigma}, \hat{\tau}, \hat{\nu}$ は、テンソルを要素とする線形空間の直交基底 [20] である。

弾性平板の中立面は、板の厚さ方向の中央にあり、変形を小さくした極限で xy 平面に一致すると仮定する。また、時間を変数 t で表す。 z 軸方向の平板の変位 $u(x, y, t)$ が屈曲変形により生じると仮定すると、板に加わる応力は変位 $u(x, y, t)$ のヘッシアン

$$(2.2) \quad Hu = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix},$$

と関係している。これは対称テンソルであり、テンソル基底を用いると、

$$(2.3) \quad Hu = \frac{\Delta_0 u}{2} \hat{1} + \frac{\Delta_1 u}{2} \hat{\nu} + \frac{\Delta_2 u}{2} \hat{\tau},$$

と展開することができる。ここで、 Δ_p ($p = 0, 1, 2$) は演算子で、 $\nabla = [\partial/\partial x, \partial/\partial y]^T$ を用いて、

$$(2.4) \quad \Delta_0 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_1 = \nabla \cdot \hat{\nu} \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_2 = \nabla \cdot \hat{\tau} \nabla = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

と定義されている。演算子 Δ_0 はラプラシアンである。演算子 Δ_1 と Δ_2 は座標を $\pi/4$ 回転させると互いに交換される演算子である。このことは、屈曲波の運動を共変的に表現する際に用いる基本的な事項であるので、以下にその詳細をまとめる。

xy 座標を z 軸の周りに角度 θ だけ回転させる変換 $[x, y]^T \rightarrow [\xi, \eta]^T$ は、

$$(2.5) \quad \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = e^{\theta \hat{\sigma}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

と表現できる。ここで、 $e^{\theta \hat{\sigma}} = \hat{1} \cos \theta + \hat{\sigma} \sin \theta$ であり、 $\hat{\sigma}^2 = -\hat{1}$ が虚数単位の性質に類似していることがら成立する [20]。以後、' を付けた物理量は、座標 ξ, η を用いて表現した量であるとする。例えば、 ∇' は $\nabla' = [\partial/\partial \xi, \partial/\partial \eta]^T$ である。変換則 $\nabla \rightarrow \nabla'$ は、 xy 平面内のベクトルと同じであり、

$$(2.6) \quad \nabla' = e^{\theta \hat{\sigma}} \nabla,$$

と表すことができる。また、ヘッシアンの変換則 $Hu \rightarrow H'u$ は、テンソルの変換則であり $H'u = e^{\theta \hat{\sigma}} H u e^{-\theta \hat{\sigma}}$ と表現できる。このヘッシアンの変換則を、成分の変換則として

$$(2.7) \quad \Delta'_0 u = \Delta_0 u,$$

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} \Delta'_1 u \\ \Delta'_2 u \end{bmatrix} = e^{2\theta \hat{\sigma}} \begin{bmatrix} \Delta_1 u \\ \Delta_2 u \end{bmatrix},$$

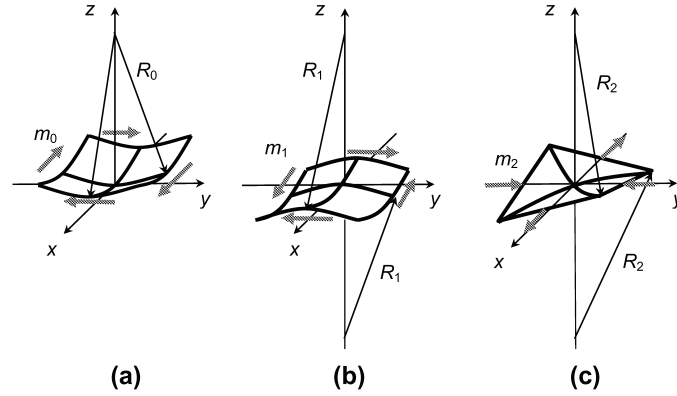


Fig. 1. Three modes of flexural deformation. Isotropic bending (a), and conjugate torsional modes (b) and (c), induced by the moment m_0 , m_1 and m_2 , respectively.

と表現することも可能である．ここに、 Δ'_p ($p = 0, 1, 2$) は、座標 ξ, η で定義された (2.4) に対応する演算子である．ラプラシアンに相当する $\Delta_0 u$ はスカラー的な変換側に従い、 $[\Delta_1 u, \Delta_2 u]^T$ は、ベクトルの変換則に似た変換測に従うが、指数関数の回転角が 2θ である．従って、 $\theta = \pi/4$ とするとこれら二つの成分は、 $\Delta'_1 u = \Delta_2 u$, $\Delta'_2 u = \Delta_1 u$ と相互に入れ代わる共役な量であることが分かる．

テンソルの内積を用いると、ヘッシアン成分はそれぞれ、 $\Delta_0 u = \langle \hat{\mathbf{1}}, Hu \rangle$, $\Delta_1 u = \langle \hat{v}, Hu \rangle$, $\Delta_2 u = \langle \hat{t}, Hu \rangle$ と表現できる．これらの成分に対応する弾性平板の変形モードを Fig.1 に示した．図には3つのモードがあり、(a) は上に凹な等方的に湾曲した変形モードであり座標軸の回転に対して対称である．(b) と (c) は共に捩れによる共役な変形モードを示している．これらの変形の曲率半径 R_p は線形近似の範囲で、 $1/R_p = \Delta_p u / 2$ と表される．

Appendix A で定義したテンソル場の発散を求める演算子 ∇^* を用いると、任意のベクトル \mathbf{a} に関して成立する恒等式 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) = \nabla^* \nabla \mathbf{a}$ を導くことができる．この恒等式で $\mathbf{a} = \nabla u$ とすると、ヘッシアン成分が満たすべき関係として

$$(2.9) \quad \nabla \Delta_0 u = \hat{v} \nabla \Delta_1 u + \hat{t} \nabla \Delta_2 u,$$

が得られる．これは、一種の適合条件である．

2.2 モーメントの共変な表現

Fig.2 は、平板から仮想的に切り出された矩形要素で、 xy 座標に射影したときの辺が軸に平行である．また、各矢印は矩形要素の断面に作用しているモーメントおよび剪断力の成分を示している．法線が x 軸方向 (y 軸方向) を向いた断面に作用する単位長さあたりのモーメントと剪断力をそれぞれ m_{xx}, s_x (m_{yy}, s_y) とする．一方、 m_{yx} と m_{xy} は、それぞれ x 軸あるいは y 軸に平行な法線を持つ断面に作用しているモーメント成分である．捩

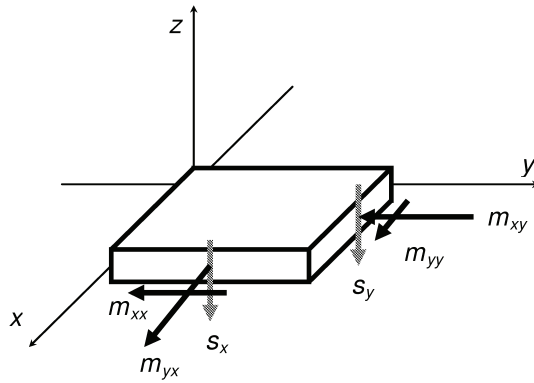


Fig. 2. Rectangular plate element and the definition of moment and shear components.

じり変形の対称性から、 m_{yx} と m_{xy} の大きさは等しいがベクトルとしての向きは、 m_{yx} で x 軸の正の方向、 m_{xy} で y 軸の負の方向を向いている [5]. なお、図ではモーメントを右手系に従って矢印で表している. 即ち、矢印の方向に右手の親指を向けたとき他の四指が巻きつく回転方向が、モーメントが物体を回転させようとする向きである. 剪断力の成分 s_x と s_y は、 z 軸に平行な矢印で示されており、 z 軸の負の方向を向いた場合を正の値とした. 成分 s_x, s_y は何某かの力を xy 座標に沿って分解した量ではないので、これらをまとめた量 $\mathbf{s} = [s_x, s_y]^T$ が従う変換則がベクトルの変換則であることは自明ではない. このことは、後述するように \mathbf{s} が (2.21) で定義されることから証明することができる.

モーメントが弾性平板の屈曲により生じると仮定すると、モーメントの成分を $m_{xx} = D(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$, $m_{yy} = D(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$, $m_{xy} = m_{yx} = (1 - \nu)D \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ と表現できることが知られている [18]. これらの関係式は、弾性平板が等質な場合に導出されているが、非等質な場合でも材料定数に位置依存があるとすることでそのまま成立する. ここに、 $\nu(x, y)$ は平板材料のポアソン比、 $D(z, x)$ は曲げ剛性を表すパラメータで、Young 率 $E(x, y)$ と平板の厚さ $b(x, y)$ を用いて、

$$(2.10) \quad D = \frac{Eb^3}{12(1 - \nu^2)},$$

と定義されている.

モーメントテンソルの表現には、矩形要素の辺に加わる成分を用いて $[m_{pq}](p, q = x, y)$ と表す方法と、テンソル基底を用いて

$$(2.11) \quad M = m_0 \hat{1} + m_1 \hat{v} + m_2 \hat{t},$$

と表す方法がある. これらの表現が等価であることから、関係式 $m_0 = (m_{xx} + m_{yy})/2$, $m_1 = (m_{xx} - m_{yy})/2$, $m_2 = m_{xy} = m_{yx}$ を得る. これらの関係式から、等方的な平板ではモーメントの成分 m_p ($p = 0, 1, 2$) が、

$$(2.12) \quad m_0 = \frac{1}{2}(1 + \nu)D\Delta_0 u,$$

$$(2.13) \quad m_1 = \frac{1}{2}(1 - \nu)D\Delta_1 u,$$

$$(2.14) \quad m_2 = \frac{1}{2}(1 - \nu)D\Delta_2 u,$$

と、それぞれヘッシアンの成分 $\Delta_p u$ により生成されることが分かる。(2.13) と (2.14) の右辺に現れる係数 $(1 - \nu)D$ が共通な理由は、Fig.1 に関連して述べたように、2つの変形モード (b) と (c) が座標の回転により互いに変換される共役なモードだからである。

定義式 (2.12)~(2.14) から、 M はヘッシアンと同様にテンソルの変換則に従うことが直ちに分かる。即ち、座標の回転に対して m_0 は (2.7) と同様にスカラー的な変換則に、 $[m_1, m_2]^T$ は (2.8) と同様な変換則に従い、

$$(2.15) \quad m'_0 = m_0,$$

$$(2.16) \quad \begin{bmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{bmatrix} = e^{2\theta\hat{\sigma}} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix},$$

と表現できる。

2.3 運動方程式の共変な表現

2.3.1 モーメントのつり合い条件と剪断力

弾性平板から仮想的に切り出した微小な矩形要素を考え、これを xy 平面に射影した領域を A で表す。法線ベクトル \mathbf{n} を持つ断面に加わる単位長さ当たりの剪断力 $\mathbf{s}(x, y)$ とモーメントベクトル $\mathbf{m}(x, y)$ は、剪断力ベクトル $\mathbf{s} = [s_x, s_y]^T$ 、(2.11) で定義されたモーメントテンソル M を用いて、それぞれ、 $s = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$ と $\mathbf{m} = \hat{\sigma} M \mathbf{n}$ で求めることができる。モーメントベクトル \mathbf{m} の定義式で、右辺にある $\hat{\sigma}$ を入れない場合もある [5]。しかし、本論文では、モーメントベクトルが物体を回転させようとする向きを右手系で表示することとした。このことにより、 $M \mathbf{n}$ を時計方向に $\pi/2$ 回転させる必要があり、 $\hat{\sigma}$ が乗じられている。剪断力 $s (= \mathbf{s} \cdot \mathbf{n})$ が位置ベクトル \mathbf{r}_A で指定される点の回りに発生させるモーメントベクトルは、 $-\hat{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$ である。従って、領域 A に対応する平板の矩形要素にその周辺 ∂A から加わる全モーメント \mathbf{m}_A は、

$$(2.17) \quad \mathbf{m}_A = \int_{\partial A} \{-\hat{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} + \hat{\sigma} M \mathbf{n}\} d\ell,$$

で与えられる、ここで、 $d\ell$ は境界 ∂A に沿った線要素の長さである。ガウスの定理を右辺の積分に用いると、

$$(2.18) \quad \mathbf{m}_A = \int_A \hat{\sigma} \{-\mathbf{s} - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \nabla \cdot \mathbf{s} + \nabla * M\} dS,$$

が得られる．ここで， $\nabla * M$ はテンソル M の発散であり $\nabla * M = \nabla m_0 + \hat{v}\nabla m_1 + \hat{\tau}\nabla m_2$ と定義されたベクトル量である．テンソル基底を用いた発散の表示方法の詳細を Appendix A にまとめた．矩形要素 A が十分に小さいとき，位置ベクトル \mathbf{r}_A を領域 A 内に設けると，(2.18) 右辺の被積分関数の第 2 項は無視できるので，

$$(2.19) \quad \mathbf{m}_A \approx \hat{\sigma}(-\mathbf{s} + \nabla * M)dS,$$

である．ここで， dS は領域 A の面積である．

平板の微小な矩形要素を考え，その直交する二辺に沿って $\xi\eta$ 座標を設け， ζ 軸をその原点が板の厚さ方向の真中にあるように設置する．弾性平板の変形が小さな極限でその中立面が xy 平面に一致すると仮定すると，断面の単位長さ当たりの 2 次モーメント I は， $I = b^3/12$ となる．平板の変位 u が大きくない場合，矩形要素の辺の長さを $d\xi$ ， $d\eta$ とすると，これを xy 平面に射影した領域 A の面積 dS を $dS = d\xi d\eta$ と表現できる．矩形要素が剛体であるとする，その角速度ベクトルを $\hat{\sigma}\nabla\dot{u}$ で近似できるので， ξ 軸をこの角速度ベクトルに平行に設けると，矩形要素の角運動量 \mathbf{L}_A を，

$$(2.20) \quad \mathbf{L}_A = \int_{-b/2}^{b/2} (\zeta \hat{\sigma} \nabla \dot{u}) (\rho d\zeta d\xi) d\eta = \hat{\sigma} \rho I \nabla \dot{u} dS,$$

と表現することができる．ここで，積分は $\zeta\xi$ 面の中で ζ 軸に沿って板の厚さにわたって行った．

矩形要素に加わるモーメントと角運動量の釣り合い条件 $\mathbf{m}_A = \dot{\mathbf{L}}_A$ から，(2.19), (2.20) を用いると剪断力ベクトル \mathbf{s} を

$$(2.21) \quad \mathbf{s} = \nabla m_0 + \hat{v}\nabla m_1 + \hat{\tau}\nabla m_2 - \rho I \nabla \dot{u},$$

と表現できる．右辺第 1 および第 4 項は，スカラー的な量 m_0, \dot{u} の勾配なのでベクトルである．一方，第 2 項および第 3 項は，単独ではベクトルの変換則に従っていない．しかし，両者をまとめると変換則

$$(2.22) \quad \hat{\tau}\nabla' m'_1 + \hat{v}\nabla' m'_2 = e^{\theta\hat{\sigma}} (\hat{\tau}\nabla m_1 + \hat{v}\nabla m_2),$$

に従う．これはベクトルの変換則であり，(2.6) および (2.16) を用いることで導くことができる．

モーメント M を成分 $m_{xx}, m_{yy}, m_{xy} = m_{yx}$ を用いて表した場合，(2.21) は $s_x = \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - \rho I \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$ ， $s_y = \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} - \rho I \frac{\partial \dot{u}}{\partial y}$ ，となる．これらの定義式では，標軸の回転に対する共変性を簡潔には表現できていない．その理由は，これらの式の右辺第 1 項をそれぞれ $m_{xx} = m_0 + m_1$ ， $m_{yy} = m_0 - m_1$ のように m_0 と m_1 を用いて表現することで分かるように，座標軸の回転に際してスカラー的に変化する m_0 とスカラー的には変化しない m_1 が混じっていることにある．一方，定義式 (2.21) は，変換則 (2.22) が示すようにベクトルとしての変換則，即ち，共変性が， m_1 と m_2 を介して明示されている．この表現を可能にしたことが，テンソル基底を用いた屈曲波の表示方法の重要な成果である．

2.3.2 力のつり合い条件と運動方程式

弾性平板の矩形要素 A の慣性力 $-\rho b \ddot{u} dS$ と境界 ∂A から作用する剪断力 \mathbf{s} が釣り合うことから,

$$(2.23) \quad \int_{\partial A} \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} d\ell = - \int_A \rho b \ddot{u} dS,$$

を得ることができる. この左辺にガウスの定理を適用して面積分に変換し, A が任意であることを使うと, $\nabla \cdot \mathbf{s} + \rho b \ddot{u} = 0$, 即ち

$$(2.24) \quad \Delta_0 m_0 + \Delta_1 m_1 + \Delta_2 m_2 - \nabla \cdot (\rho I \nabla \ddot{u}) + \rho b \ddot{u} = 0,$$

が得られる. これが, 非等質な弾性平板の屈曲波を支配する運動方程式である. この左辺に現れる第 1, 第 4, 第 5 の項は, スカラー量であり xy 座標の回転により変化しない. また, 第 2 および 第 3 の項が従う変換則は単独ではスカラー的ではないが両者をまとめるとスカラー的であることを, 変換則 (2.6), (2.22) から導くことができる. テンソル場に作用するラプラシアン $\hat{\Delta}$ を

$$(2.25) \quad \hat{\Delta} = \nabla \cdot \nabla^*$$

で定義すると, 運動方程式を, $\hat{\Delta} M - \nabla \cdot (\rho I \nabla \ddot{u}) + \rho b \ddot{u} = 0$ と表現することもできる.

材料定数や厚さ b などが位置に依存しない等質的な弾性平板の場合, 定義式 (2.4) と適合条件 (2.9) から

$$(2.26) \quad \Delta_1 m_1 + \Delta_2 m_2 = \frac{1}{2}(1 - \nu) D \Delta_0(\Delta_0 u),$$

が成立するので, 運動方程式は (2.24) は

$$(2.27) \quad D \Delta_0(\Delta_0 u) - \rho I \Delta_0 \ddot{u} + \rho b \ddot{u} = 0,$$

に帰着する. この方程式は, 角運動量の効果が小さく $I = 0$ と見なせる場合, 良く知られた方程式 [5] に一致する. 等質的な平板では, Fig.1 (b), (c) で示した平板の捩じりモードを表す成分 $\Delta_1 u, \Delta_2 u$ が, 適合条件から得られる関係式 (2.26) のために, 運動方程式から失われていた. これらの成分は等質性が崩れると回復し, 運動方程式 (2.24) では m_1, m_2 を通じて現れている.

3. 弱形式による定式化

3.1 汎関数と境界条件

Fig.3 に示したように, 弾性平板が xy 平面内の単連結な 2 次元領域 S を占めているとする. 領域 S の境界を ∂S とし, その境界に沿って長さ ℓ を定義すると, 境界上の点を ℓ

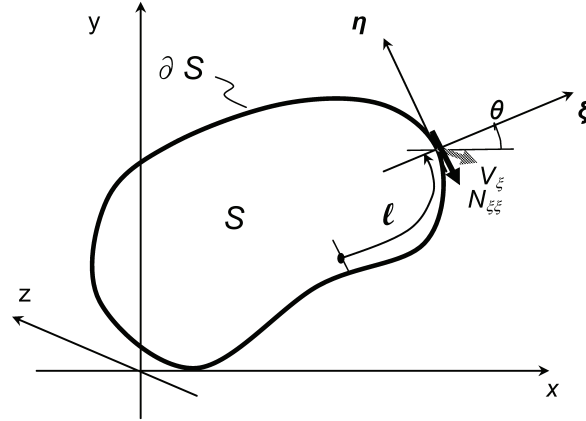


Fig. 3. Analyzing region S and definition of the $\xi\eta$ -axis at a point on the boundary ∂S .

の値で指定することができる。境界上の各点で $\xi\eta$ 座標を，図のように ξ 軸が境界の法線と平行になる様に設ける。弱形式理論 [4] に従い，運動方程式と等価な解を与える汎関数を求めた。得られた汎関数 $F[w, u]$ は，任意関数あるいはテスト関数を $w(x, y)$ とすると，

$$(3.1) \quad F = \int_S (m_0 \Delta_0 w + m_1 \Delta_1 w + m_2 \Delta_2 w + \rho I \nabla \ddot{u} \cdot \nabla w + \rho b i \ddot{u} w) dS + \int_{\partial S} (V_\xi w - N_{\xi\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi}) d\eta,$$

で与えられる。ここで， dS は面要素であり， $d\eta$ は境界に沿った線要素 dl に等しい。また， V_ξ と $N_{\xi\xi}$ は，それぞれ境界 ∂S から加わる単位当たりの剪断力とモーメントである。運動方程式 (2.24) を満たす $u(x, y, t)$ を求めることは，如何なる関数 $w(x, y)$ に対しても条件 $F[w, u] = 0$ を満たす関数 $u(x, y, t)$ を求めることと同等であることを以下に示す。

モーメントの成分 m_p ($p = 0, 1, 2$)，剪断力ベクトル \mathbf{s} ，モーメントテンソル \mathbf{M} および任意関数 w の間に，恒等式

$$(3.2) \quad m_0 \Delta_0 w + m_1 \Delta_1 w + m_2 \Delta_2 w + \rho I \nabla \ddot{u} \cdot \nabla w = (\nabla \cdot \mathbf{s})w - \nabla \cdot (\mathbf{s}w - \mathbf{M} \nabla w),$$

が成立する。恒等式の両辺を領域 S で積分して，ガウスの定理を用いることで，

$$(3.3) \quad \int_S (m_0 \Delta_0 w + m_1 \Delta_1 w + m_2 \Delta_2 w + \rho I \nabla \ddot{u} \cdot \nabla w) dS = \int_S (\nabla \cdot \mathbf{s})w dS - \int_{\partial S} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{s}w - \mathbf{M} \nabla w) dl,$$

が得られる。ここで， \mathbf{n} は領域 S の境界から外に向かう法線ベクトルである。境界 ∂S の各点で， $\xi\eta$ 座標により表現された量を ' を付けて示すと，座標の変換則から $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{M} \nabla w) = \mathbf{n}' \cdot (\mathbf{M}' \nabla' w)$ が成立することが分かる。ここで， $\mathbf{n}' = [1, 0]^T$ であることを利

用すると,

$$(3.4) \quad \mathbf{n} \cdot (M\nabla w) d\ell = (m'_0 \frac{\partial w}{\partial \xi} + m'_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} + m'_2 \frac{\partial w}{\partial \eta}) d\eta,$$

を得る. 境界 ∂S 上の点の座標 x, y を, パラメータ ℓ を用いて $x(\ell), y(\ell)$ と表現すると, $\frac{\partial}{\partial \eta} m'_2 = \frac{d}{d\ell} m'_2(x(\ell), y(\ell))$, $d\eta = d\ell$ である. 従って, 上式を (3.3) の右辺第 2 項に代入して変数 ℓ の関数として部分積分を行うと

$$(3.5) \quad \int_S (m_0 \Delta_0 w + m_1 \Delta_1 w + m_2 \Delta_2 w + \rho I \nabla \ddot{u} \cdot \nabla w) dS \\ = \int_S (\nabla \cdot \mathbf{s}) w dS - \int_{\partial S} (s'_\xi + \frac{\partial m'_2}{\partial \eta}) w d\eta + \int_{\partial S} (m'_0 + m'_1) \frac{\partial w}{\partial \xi} d\eta,$$

となる. ただし, 境界 ∂S に沿った物理量は全て一価の関数であるとした.

汎関数 $F[w, u]$ の定義式 (3.1) の右辺第 1 項に (3.5) を代入することで

$$(3.6) \quad F = \int_S (\nabla \cdot \mathbf{s} + \rho b \ddot{u}) w dS - \int_{\partial S} (s'_\xi + \frac{\partial m'_2}{\partial \eta} - V_\xi) w d\eta + \int_{\partial S} (m'_0 + m'_1 - N_{\xi\xi}) \frac{\partial w}{\partial \xi} d\eta,$$

を得る. 従って, 任意の関数 w に関して $F[w, u] = 0$ が満たされるなら, 右辺第 1 項から運動方程式 (2.24) が得られる. また, 境界 ∂S 上で右辺第 2 項の w と第 3 項の $\partial w / \partial \xi$ が互いに独立に任意の値を取り得るので, 境界 ∂S 上の各点で, $s'_\xi + \frac{\partial m'_2}{\partial \eta} = V_\xi$, $m'_0 + m'_1 = N_{\xi\xi}$, が成立する. これらは, Fig. 3 に示したように境界上の各点で設けた $\xi\eta$ 座標を用いて表現されている. 法線ベクトル \mathbf{n} が x 軸となす角を θ とすると, 内積を用いて成分を表現することで,

$$(3.7) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \hat{\sigma} \nabla \langle \hat{\tau} e^{2\theta\hat{\sigma}}, M \rangle = V_\xi,$$

$$(3.8) \quad \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{1}} + \hat{\nu} e^{2\theta\hat{\sigma}}, M \rangle = N_{\xi\xi},$$

と左辺を xy 座標で表現できる. ここで, 関係式 $m'_0 = \langle \hat{\mathbf{1}}, M' \rangle / 2 = \langle \hat{\mathbf{1}}, M \rangle / 2$, $m'_1 = \langle \hat{\nu}, M' \rangle / 2 = \langle \hat{\nu} e^{2\theta\hat{\sigma}}, M \rangle / 2$, $m'_2 = \langle \hat{\tau}, M' \rangle / 2 = \langle \hat{\tau} e^{2\theta\hat{\sigma}}, M \rangle / 2$ を用いた. これらはベクトルおよびテンソルの内積で表現されており, 変換則が直ちに分かる共変性を明示した表現になっている. 条件 (3.7) は, 境界が x 軸に垂直な辺の場合 $s_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = V_x$ となり, Kirchhoff の剪断条件 [7, 18] に帰着する. また, 従来の Kirchhoff の理論では剪断力ベクトル \mathbf{s} がモーメントのみで決まるとされていたが, 弾性平板の角運動量を考慮して (2.21) の様に拡張されている.

3.2 エネルギー流束

弾性平板の単位面積あたりの運動エネルギー ϵ_k は, $\epsilon_k = \rho b \dot{u}^2 / 2 + \rho I (\nabla \dot{u})^2 / 2$ で表現できる. 一方, 弾性エネルギー ϵ_e は, モーメント M とヘッシアン Hu の内積を用いて

$\frac{1}{2}\langle M, Hu \rangle$, 即ち,

$$(3.9) \quad \epsilon_e = m_0 \frac{\Delta_0 u}{2} + m_1 \frac{\Delta_1 u}{2} + m_2 \frac{\Delta_2 u}{2},$$

で定義される. ポテンシャルエネルギーがスカラーであることは, テンソルの内積の性質, あるいは, 変換則 (2.8), (2.16) に依っている.

恒等式 (3.2) で $w = \dot{u}$ と置き換えた関係式を用いることで, エネルギー流束 \mathbf{J} を

$$(3.10) \quad \mathbf{J} = \mathbf{s}\dot{u} - M\nabla\dot{u},$$

と定義すると, 屈曲波がエネルギー保存則を満たすことを導出できる. ここで, 右辺第1項は剪断応力 \mathbf{s} による仕事率, 第2項はモーメント M による仕事率に関係している. 外力によるエネルギーの供給がないと考えると, 力学的エネルギー $\epsilon = \epsilon_k + \epsilon_e$ の保存則は, $\dot{\epsilon} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, である. ここで, $\dot{\epsilon}$ は ϵ の時間微分を示している.

3.3 円盤の有限要素法解析

平板の厚さの変化が振動にどのような影響を与えるかを, 薄い円盤における軸対称な固有モードの解析を通じて調べる.

薄い円盤が軸対称な振動を行っている場合, 円盤の中心に原点を設けた極座標で考えると r と φ をそれぞれ動径と偏角として

$$(3.11) \quad \Delta_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \Delta_1 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \cos 2\varphi, \quad \Delta_2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sin 2\varphi,$$

と表現することができる. なお, 任意関数 w も軸対称だとして動径 r だけの関数と考えると同様な表現を得ることができる. 演算子 Δ_1, Δ_2 が直交座標で定義されていることから, 変位 u が動径 r のみの関数であるにも関わらず $\Delta_1 u, \Delta_2 u$ に偏角 φ が現れる. しかし, 汎関数 (3.1) を極座標で表現すると

$$(3.12) \quad F = \int_0^R \left\{ (\Delta_0 w) D_0 (\Delta_0 u) + (\Delta_r w) D_1 (\Delta_r u) - \omega^2 \rho (I \nabla w \cdot \nabla u + b w u) \right\} 2\pi r dr$$

となり, 偏角 φ に依存しない表現が得られる. このとき, 円盤は角振動数 ω の固有モードで振動しているとした. また, $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $D_0 = \frac{1}{2}(1 + \nu)D$, $D_1 = \frac{1}{2}(1 - \nu)D$ と置いた. 円盤の周辺 $r = R$ が自由端である場合を想定し, $V_r = 0, N_{rr} = 0$ (座標 ξ の代わりに r を使用) を境界条件として課すことで, (3.1) の右辺にある境界での積分を取り除いてある. 有限要素法のスキーム [9] に従うと, 任意関数 $w(r)$ に対して汎関数 $F[w, u]$ の値がゼロになる条件から, 変位 $u(r)$ の関数値を決定することができる. この条件は, ω^2 を固有値とする固有値問題に帰着する. このとき, 場の量を補間する代数関数の次元を3次以上にしなければならないことが知られている [16]. 以下に示す有限要素法の解析例では Hermite 3次式を用いる.

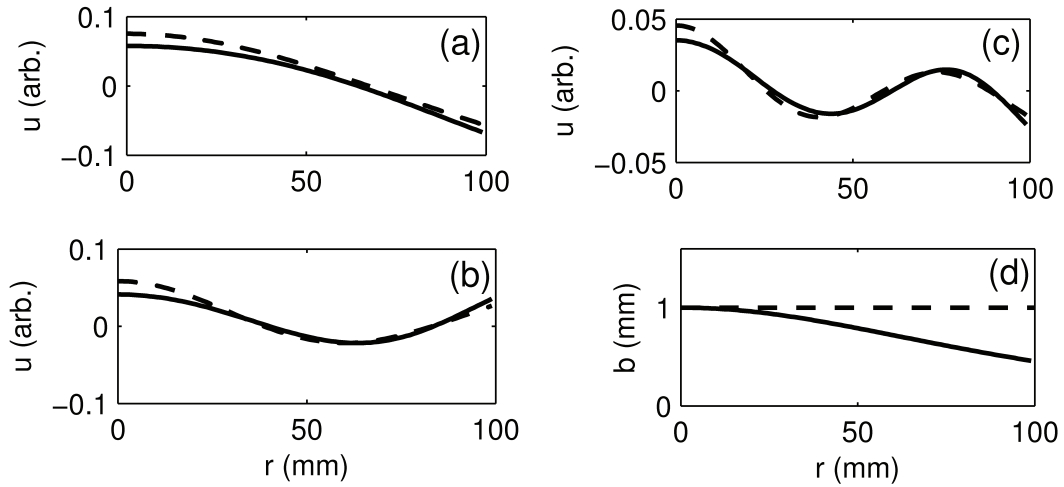


Fig. 4. Comparison of deformations in inhomogeneous disk (full lines) and homogeneous disk (dashed lines). The mode shapes are for (a) the first, (b) the second and (c) the third eigenmodes. The thickness distributions are shown in (d).

円盤の半径を $R = 100\text{mm}$ とし、区間 $0 \leq r \leq R$ を 15 等分に細分化して有限要素法で使用するメッシュを作成した。円盤の厚さ b として次の2つの場合を検討して比較する。一つは等質な場合で円盤の厚さが $b = 1\text{mm}$ と一定の場合であり、他方は非等質な場合で厚さ $b(r)$ が

$$(3.13) \quad b(r) = b_0 \text{sech}(r/L)$$

と変化する場合である。ここで、 $b_0 = 1\text{mm}$, $L = 70\text{mm}$ とした。また、平板の材質としてアルミニウムを想定して次の材料定数を用いた：Young 率 $E = 70\text{GPa}$, Poisson 比 $\nu = 0.33$, 質量密度 $\rho = 2.7 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 。

図4に有限要素法によりもとめた固有状態にあるモード形状 $u(r)$ を示した。(a) 図に基底モードが、これに続く2次と3次の振動モードがそれぞれ (b) 図と (c) 図に示されている。(d) 図は平板の厚さ b の位置依存を示している。いずれも、実線が非等質で厚さ b に位置依存がある場合、破線が等質で厚さ b が一定な場合を表している。また、固有振動数は (a), (b), (c) の順にそれぞれ、 0.201kHz , 0.752kHz , 1.70kHz (非等質な場合)、および、 0.229kHz , 0.988kHz , 2.22kHz (等質な場合) である。非等質な円盤は、中心部分 ($r \approx 0$) が周辺より厚くなっていることから、等質な場合よりも中心部分が変形しにくい様子が見てとれる。また、同じく非等質な円盤では、等質な円盤と比較して外縁部が薄いことからこの部分からの復元力が小さくなるので、高次モードほど固有振動数が低下する割合が増している。

4. まとめ

テンソル基底を用い座標軸の回転に対する共変性を明示しつつ、厚さや弾性定数などが位置に依存する非等質な弾性平板の屈曲運動を定式化した。弾性平板に作用する応力状態は、変位のヘッシアンをテンソル基底で展開したときに現れる3つの変形モードで決定される。等質な平板に対する Kirchhoff-Rayleigh 理論では、これらの変形モードのうち振じれ変形に対応する2つのモードが適合条件により運動方程式から消失していた。しかし、平板の非等質性はこの消失したモードを回復させる。テンソル基底を用いた表現を利用して、弱形式理論による運動の定式化とエネルギー流束の定義を可能にした。また、平板の変位が満たす境界条件に関して、共変性が明示された表現を導出した。

得られた弱形式理論の汎関数を用いて有限要素法により、薄い円盤の回転対称な変形モードを求める例を示した。さらに、この汎関数を利用すると屈曲波の散乱問題を解析する新しい数値解析法を開発できる可能性がある。今後は、この数値解析の研究を行う予定である。

Appendix A. テンソルの発散

テンソル場をベクトル場へ変換する演算として発散が定義できる [11]。ここでは、2階のテンソルに関する発散をテンソル基底を用いて表現する方法をまとめる。

任意の2次元の定ベクトル \mathbf{a} を2階のテンソル場 $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に乗じた量 $\mathbf{a} \cdot T$ は、ベクトル場であるので、この発散を取りスカラー場 $\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot T)$ を求めることができる。この量は \mathbf{a} の線形変換と見なすことができるので、あるベクトル場 $\nabla * T$ が存在して $\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot T) = \mathbf{a} \cdot (\nabla * T)$ と表現できる。この $(\nabla * T)$ を、テンソル場の発散と定義する。テンソル場を $T = [t_{pq}]$ ($p, q = x, y$) と成分で表現すると $\nabla * T = \{\sum_q \partial t_{pq} / \partial x_q\}$ である。

一般に、テンソル場 T は基底と成分 t_p ($p = 0, 1, \dots, 4$) を用いて、

$$(Appendix A.1) \quad T = \hat{1}t_0 + \hat{\sigma}t_1 + \hat{v}t_2 + \hat{t}t_3,$$

と展開できる。このとき、

$$(Appendix A.2) \quad \nabla * T = \hat{1}\nabla t_0 + \hat{\sigma}\nabla t_1 + \hat{v}\nabla t_2 + \hat{t}\nabla t_3,$$

である。

さらに、2次元の領域 S とその境界 ∂S に対して、関係式

$$(Appendix A.3) \quad \int_{\partial S} T \mathbf{n} dl = \int_S \nabla * T dS,$$

が成立する。ここで、左辺は境界 ∂S に沿って反時計回りに行う線積分であり、 \mathbf{n} は境界から領域 S の外向きに設けられた法線ベクトルを、 dl は境界に沿った線要素の長さを表

す。また、右辺は領域 S において行う面積分であり、 dS は面要素 $dx dy$ である。この関係式は、両辺に定数ベクトル \mathbf{a} を乗じると、2次元空間内のベクトル場 $\mathbf{a} \cdot T$ に対するガウスの定理である。

謝辞 本論文は科研費 (23560065) の補助を受けています。

参考文献

- [1] M. Cherkaoui and L. Capolungo, Atomistic and Continuum Modeling of Nanocrystalline Materials: Deformation Mechanisms and Scale Transition, Springer, New York, 2009.
- [2] M.C. Cross and R. Lifshitz, Elastic wave transmission at an abrupt junction in a thin plate with application to heat transport and vibrations in mesoscopic systems, Physical Review B, **46** (2001) article 085324.
- [3] M. Farhat, S. Guenneau, S. Enoch, and A. B. Movchan, Cloaking bending waves propagating in thin elastic plates, Physical Review B, **79** (2009) article 033102.
- [4] J. Fish and T. Belytshko, A first course in finite elements, chap. 6, John Wiley & Sons, Chichester, 2007.
- [5] K. F. Graff, Wave motion in elastic solids, chp. 4, Clarendon Press, Oxford 1975.
- [6] 池田峰雄, 現代ベクトル解析とその応用, コロナ社, 東京, 1975.
- [7] G. Kirchoff, , Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) **40** (1850) 51–88.
- [8] G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mathematische Physik: Mechanik (2te Auflage), p.460-466, Teubner, Leipzig 1876.
- [9] 小柴正則, 光・波動のための有限要素法の基礎, 森北出版, 東京, 1990.
- [10] V. V. Krylov and F. J. B. S. Tilman, Acoustic ‘black holes’ for flexural waves as effective vibration dampers, Journal of sound and vibration, **274** (2004) 605–619 .
- [11] 久田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 東京, 1992.
- [12] P. G. Lowe, Basic principles of plate theory, Surrey Univ. Press, London 1982.
- [13] W. Milton, M. Briane, and J. R. Willis, On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form, New Journal of Physics, **8** (2006) article 248.
- [14] A. N. Norris, Flexural waves on narrow plates, Journal of Acoustic Society of America, **113** (2003) 2647–2658.

- [15] S. Papargyri-Beskou D. Polyzos and D. E. Beskos, Wave dispersion in gradient elastic solids and structures: A unified treatment, *International Journal of Solids and Structures*, **46** (2009) 3751–3759.
- [16] P. Šolín, *Partial differential equations and the finite element method*, section 6.5, Wiley & Sons, Hoboken 2006.
- [17] H. Tanei, N. Nakamura, H. Ogi, and M. Hirao, Unusual Elastic Behavior of Nanocrystalline Diamond Thin Films, *Physical Review Letters*, **100** (2008) article 016804.
- [18] S. Timoshenko, and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells* (2nd ed.), chap. 4, McGraw-Hill, New York 1959.
- [19] C. Vemula and A. N. Norris, Flexural wave propagation and scattering on thin plates using Mindlin theory, *Wave motion*, **26** (1997) 1–12.
- [20] 山内泰彦, 杉浦光夫, 連続群論入門, p.14, 培風館, 東京, 1960.
- [21] K. Yamazaki, T. Yamaguchi and H. Yamaguchi, Modulation of Young's modulus of poly(methyl methacrylate) nano beam, *Japanese Journal of Applied Physics*, **46** (2007) L1225–L1227.

加藤 初弘 (会員) 〒400-8511 甲府市武田 4-3-11 山梨大学 工学部

1987年北大・工・応用物理学専攻博士課程修了。同年(株)東芝入社。1994年函館工業高等専門学校を経て1999年山梨大学工学部現在に至る。デバイスに関連した設計技術や数値解析法などを研究。

加藤 初儀 (非会員) 〒059-1275 苫小牧市錦岡 433 苫小牧高専

1984年北大・工・応用物理学専攻修士課程修了。1998年博士(工)を北大より取得。日本電気(株)半導体事業本部勤務を経て、現在苫小牧高専教授。電磁波やフォノンなどを含め広く散乱現象に興味を持つ。