

弱形式離散化スキーム逐次伝達法を用いた 散乱問題の数値解析手法の提案

加藤 初弘¹⁾ 加藤 初儀²⁾

1) 山梨大学 総合研究部

2) 苫小牧工業高等専門学校

概要

運動方程式の共変性に注目して、弾性平板上の屈曲運動の新しい定式化を行った。この運動表現は弱形式理論との整合性がよく、離散化による2階差分方程式の導出が初めて可能となった。この解析手順を弱形式離散化スキームと呼ぶ。弱形式離散化スキームの下で逐次伝達法を適用することで、弾性導波路上で生じる屈曲波の散乱問題を解析した。

New Numerical Method of Scattering Problems Using the Recursive Transfer Method under the Weak-Form Discretization Scheme

Hatsuhiko Kato¹⁾ Hatsuyoshi Kato²⁾

1) Interdisciplinary Graduate School, University of Yamanashi

2) National Institute of Technology, Tomakomai College

Abstract

Focusing on the covariance of dynamic equation under the coordinates rotation, we have derived a new expression for flexural waves on elastic plates. This expression has compatibility with the framework of the weak-form theory and enables us to derive second-order difference equation for the first time, which was termed as the weak-form discretization scheme. Using the recursive transfer method under this scheme, the scattering problem of flexural waves on elastic waveguide is analyzed.

1 まえがき

波動の散乱現象はさまざまな自然科学の分野で現れ、数理現象としても興味深い対象である。散乱現象の多くは2階の微分方程式で支配されていることから、理論的な基礎付けや数値解析的な手法も主に2階の微分方程式に関連して行われている。一方、弾性的な梁や平板における屈曲波は、4階の微分方程式で記述でき重調和解析の立場から理論的に興味深い現象であるばかりか、効率的な処理が可能な実用性の高い研究対象でもある。本研究は、数値的な解析手法である逐次伝達法 [2] を屈曲波の散乱現象に適用できるように拡張する方法を提案する。このために、弱形式理論の枠組みの下でシステムを離散化する手法を開発した [4]。

2 屈曲波とその弱形式離散化

座標軸を回転しても屈曲波の運動方程式の表現は不変である。この性質は方程式の共変性 [1] と呼ばれる性質の一種である。テンソル基底を用いることで明示的に共変性を表現できる。

平板に沿って直交する x 軸および y 軸を設け、屈曲変形による平板に垂直な方向の変位を $u(x, y)$ で表す。このとき、弾性論的な力学量はナブラ演算子 ∇ の 2 項積を用いて定義されたヘッシアン $Hu (= \nabla \nabla u)$ で表現できる。ヘッシアンは 2 次元空間におけるテンソルの一種であり、基底

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

を用いた一次結合により $Hu = \hat{\mathbf{i}} \frac{1}{2} \Delta_0 u + \hat{\nu} \frac{1}{2} \Delta_1 u + \hat{\tau} \frac{1}{2} \Delta_2 u$ と展開できる。ここで、演算子が $\Delta_0 = \nabla \cdot \hat{\mathbf{i}} \nabla$, $\Delta_1 = \nabla \cdot \hat{\nu} \nabla$, $\Delta_2 = \nabla \cdot \hat{\tau} \nabla$ と定義されている。ヘッシアンを成分 $\Delta_r u$ ($r = 0, 1, 2$) を用いて表現すると、座標が θ 回転した際の成分変化は、 $\Delta'_0 u = \Delta_0 u$ であり $[\Delta'_1 u \ \Delta'_2 u] = [\Delta_2 u \ \Delta_1 u] e^{-\hat{\sigma} 2\theta}$ と表現できる。ここで、ダッシュ「'」がついた演算子は回転した後の座標系での表現である。さらに、ステイフネス定数 $D_r(x, y)$ ($r = 0, 1, 2$) を用いて $m_r = D_r \Delta_r u$ と定義すると、モーメントテンソル M は $M = \hat{\mathbf{i}} m_0 + \hat{\nu} m_1 + \hat{\tau} m_2$ と表現できる [3]。ステイフネス定数 $D_r(x, y)$ は平板のヤング率 $E(x, y)$, ポアソン比 $\nu(x, y)$, 平板の厚さ $b(x, y)$ を用いて、 $D_0 = Eb^3/24(1 - \nu)$, $D_1 = D_2 = Eb^3/24(1 + \nu)$ と定義されている。

これらの表現方法を用いることで、角振動数 ω で定常的に振動している屈曲波の運動は

$$\Delta_0 m_0 + \Delta_1 m_1 + \Delta_2 m_2 - \omega^2 \rho b u = 0 \quad (2)$$

で支配されていることを導出できる [3]。ここで、 ρ は平板の質量密度である。運動方程式 (2) では平板の慣性モーメントの影響を無視したが、この効果を考慮して共変な形式に運動方程式を表現することも可能である。

平板が図 1 に示されているような弾性導波路である場合、長方形のメッシュに座標を分割しそれらの格子点を

$$x_\ell = x_{\min} + h_x \ell, \quad y_n = y_{\min} + h_y n \quad (3)$$

と表現できる ($\ell = 0, 1, 2, \dots, N_x$, $n = 0, 1, 2, \dots, N_y$)。ここで、 x_{\min} および y_{\min} はそれぞれ導波路および解析領域の下限の座標値である。上限の値をそれぞれ x_{\max} および y_{\max} とし分割が一様とすると、分割幅は $h_x = (x_{\max} - x_{\min})/N_x$ および $h_y = (y_{\max} - y_{\min})/N_y$ で与えられる。

方程式 (2) を満たす関数 $u(x, y)$ を求める問題は、テスト関数 $w(x, y)$ をどのように選んでも汎関数

$$F_S[w, u] = \iint_S dx dy \{ \Delta_0 w D_0 \Delta_0 u + \Delta_1 w D_1 \Delta_1 u + \Delta_2 w D_2 \Delta_2 u - \omega^2 \rho b w u \} \quad (4)$$

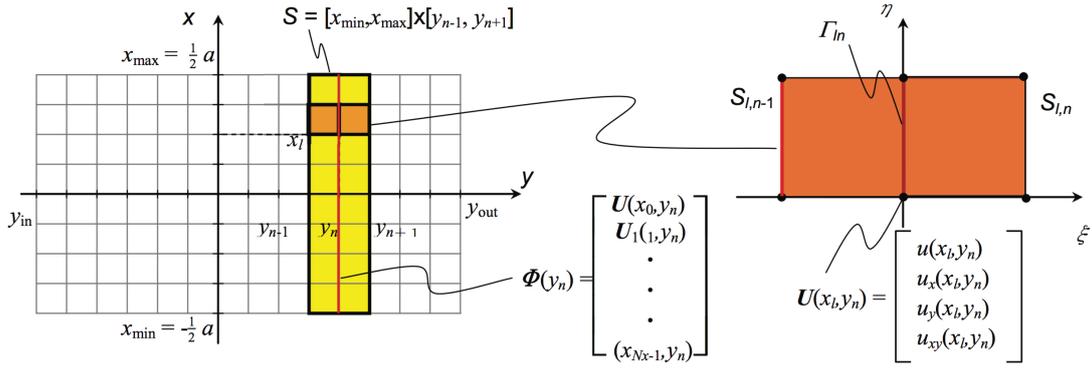


図 1: 弱形式離散化で用いる解析領域の分割と積分領域

が $F[w, u] = 0$ を満たす $u(x, y)$ を求める問題 (ヌル値問題) に等しい. 積分領域 S は図 1 に示したような 2次元空間内に設けられた解析領域における一部分であり, 散乱問題で現れる進行波の進行方向に対して垂直に広がる領域である. 格子点 (x_ℓ, y_n) の右上に位置する長方形要素を $S_{\ell,n}$ と表すと, $S = \sum_{\ell=0}^{N_x-1} (S_{\ell,n-1} + S_{\ell,n})$ と模式的に表現できる. 有限要素法でも同じ汎関数を用いるが, 差分化する領域に合わせ積分領域 S を選ぶことが弱形式離散化の特徴である.

汎関数の離散化は, 関数 $u(x, y)$ と $w(x, y)$ を格子点における関数値を用いて補間することで実施できる. 分割要素の各頂点 (x_ℓ, y_n) に 4×1 には, 縦ベクトル $\mathbf{U}(x_\ell, y_n) = [u(x_\ell, y_n) \ u_x(x_\ell, y_n) \ u_y(x_\ell, y_n) \ u_{xy}(x_\ell, y_n)]^T$ が割り当てられている. 進行軸である y 軸の離散点ごとに変位とその空間微分をまとめて $\Phi(y_n) = [\mathbf{U}(x_0, y_n)^T \ \mathbf{U}(x_1, y_n)^T \ \dots \ \mathbf{U}(x_{N_x-1}, y_n)^T]^T$ と表現する. このとき, 汎関数のヌル値問題から, 2階差分方程式

$$c_n \Phi(y_{n-1}) + b_n \Phi(y_n) + a_n \Phi(y_{n+1}) = 0, \quad (5)$$

を導出できる. ここで, c_n, b_n, a_n は $4(N_x + 1) \times 4(N_x + 1)$ 行列である [4].

3 共鳴散乱

一様な幅 a の弾性平板で作られた導波路において, $0 < y < d_{\text{sct}}$ の領域で段階的に窪みが作られた場合を考える. この窪みは上下 (z 軸方向の両側) から加工されており, 平板断面内において応力の中立軸が変形の小さくした極限で xy 平面内あるとする. 入射波が入力端 $y = y_{\text{in}}$ から y 軸の正の方向に入力され, 散乱領域で反射されるとともに一部が透過して出力端 y_{out} を通過するとする.

図 2 に反射率 R の周波数 f 依存を示した. 図 2(a) は R の変化を広い周波数範囲で表示したものである. 特に, 周波数 15.47kHz, 21.087kHz の付近において R の値にピークが存在し激しく変動している. これらのピークが変動する様子を拡大して図 2(b) と (c) に示した. ピークの原因は散乱領域で発生する局在波と入射波の共鳴である. このとき, ピークの形状が非対称になることも知られており Fano 効果と呼ばれる [5].

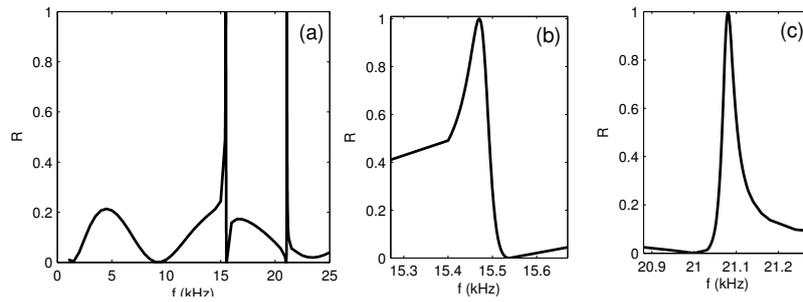


図 2: 反射率 R の周波数 f 依存. (a) 広い周波数範囲に 2 つの共鳴が発生. (b) と (c) はこれらの拡大図.

4 むすび

弱形式離散化スキームの汎用性を示す典型例として、4 階微分方程式を運動方程式とする屈曲波の弾性導波路における散乱問題を解析した。この離散化により逐次伝達法を用いて、散乱領域に発生する疑似局在波により引き起こされる共鳴現象の存在を明らかにできた。さらに、共鳴を引き起こす疑似局在波の形状を、複素数の固有値をもった固有モードとして抽出することも可能である。

謝辞

本研究は科研費 (15K04752) の補助を受けて行われた。

参考文献

- [1] W. Flügge, Tensor analysis and continuum mechanics, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [2] K. Hirose and M. Tukada, First-principles calculation of the electronic structure for a bielectrode junction system under strong field and current, *Physical Review B*, **51** (1985), 5278–5290.
- [3] 加藤初弘, 加藤初儀, 加藤 初弘, 加藤初儀非等質な弾性平板におけるテンソル基底を用いた新しい定式化, *応用数理学会誌*, **22** (2012), 253–267.
- [4] H. Kato and H. Kato, Application of the recursive transfer method to flexural waves I: Novel discretization scheme using weak form theory framework and waveguide modes on inhomogeneous elastic plates, *IEIEC Transaction A: Fundamentals*, **E97-A** (2014), 1075–1085.
- [5] H. Kato and H. Kato, Weak-form discretization, waveguide boundary conditions and extraction of quasi-localized waves causing Fano resonance, *IEICE Transactions: Fundamentals*, **E97-A** (2014), 1720–1727.