論　文

# 電磁波散乱に対する逐次伝達法の基礎検討

加藤　初弘[†a)]　木谷　昌経[†]　加藤　初儀[††]

# Recursive Transfer Method as an Accurate Numerical Method to Analyze the Scattering of the Electromagnetic Wave

Hatsuhiro KATO[†a)], Masanori KITANI[†], and Hatsuyoshi KATO[††]

**あらまし**　逐次伝達法は，電子波に関して開発された方法であるが，波動の伝搬を逐次伝達行列により表現することで境界条件を一般化できる汎用性の高い数値計算法である．ここでは，電磁波散乱に関する定式化の詳細をまとめるとともに，導波管に設置されたスリットによるマイクロ波の透過率を解析することで，この方法の有効性を実証的に検討する．

**キーワード**　逐次伝達法，散乱，透過率，数値計算法

## 1. まえがき

マイクロ波や光の散乱を取扱う数値計算法として，有限要素法 (FEM)，有限差分時間領域法 (FDTD)，ビーム伝搬法 (BMP) やこれらを融合させる工夫が数多くなされている [1], [2]．これらの中で，反射・透過を取り扱い可能な方法として，双方向固有モード伝搬法 (BEP) [3], FFT-BPM [4] やフーリエ級数展開法 [5], [6] などが論じられているが，散乱体が複雑な形状の場合，伝搬軸の各点においてモード解析を実施しなければならない．

逐次伝達法は，電極間の電子伝導に関して開発された数値計算法であるが [7], [8]，システムの空間的な構成を散乱ポテンシャルにより考慮できる汎用性の高い方法である．この方法の特徴は，状態変数として波の振幅の代わりに逐次伝達行列を用いることである．出力端での境界条件を逐次伝達行列で表現すると，その表現には波の振幅やモードの重ね合わせの情報を顕わに含んでいない．したがって，出力境界においてエネルギー流束を担わないモードも含めて多数のモードが存在している場合でも，境界条件の表現が簡潔であり特別な処理を必要としない．更に，この方法では散乱体内の各点におけるモード解析も不要である．

逐次伝達法で使用する差分方程式の安定性に対しても詳細な検討があり [9], [10]，解の安定性が保証されている．また，散乱体によりエネルギー流束を担わない局在波が引き起こされたとしても，これらを除いてエネルギー流束を求めることができるので，複雑な形状によるエネルギー吸収の解析も可能である [11].

筆者はマイクロ波への適用を前提として，逐次伝達法の基礎的な検討を始めている [12]．ここでは，導波管内に設置されたスリットを通過する散乱波の透過率に関する解析を例として，定式化の詳細を論じる．更に，この理論により数値的に得た透過率を計測値と比較することにより，実証的な検討を行う．本論文で提案しているフーリエ展開の基底関数に横方向の波数 $k_x$ を含む展開方法は，平面波が座標軸に対して斜めに入射している状況を効率的に表現できる方法である．導波管内のモードが平面波の重ね合わせとみなし得ることから，この展開法は導波管内での散乱現象にも利用できる適用範囲の広い方法である．

## 2. 逐次伝達法のマイクロ波散乱への適用

### 2.1 システムの構成

導波管における散乱現象は，入射・反射・透過の各

[†] 山梨大学大学院医学工学総合研究部，甲府市
Interdisciplinary Graduate School of Medicine and Engineering, University of Yamanashi, 4–3–11 Takeda, Kofu-shi, 500–8511 Japan
[††] 苫小牧工業高等専門学校，苫小牧市
Tomakomai National College of Technology, 433 Nishikioka, Tomakomai-shi, 059–1275 Japan
a) E-mail: katoh@yamanashi.ac.jp

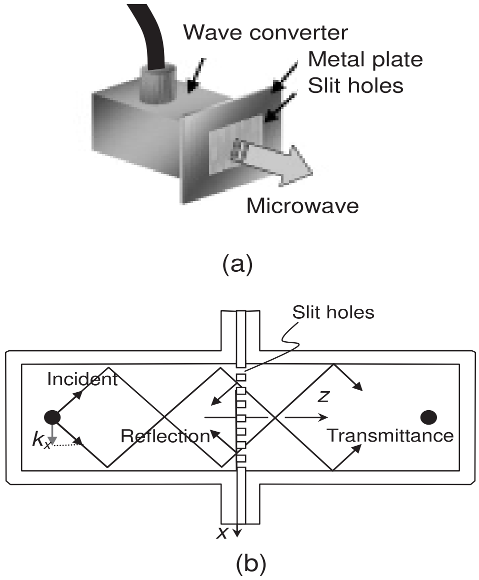


図 1　システムの概要
Fig. 1　Structure of experiment system.

波動を高い精度で計測できるので，図 1 に示したようなシステムを用いて逐次伝達法の検討を行う．図 1 (a) は，同軸導波管変換器を有する導波管の出力端に金属板で作られたスリットが設置されている様子を示す．もう一つの導波管がこれに続いて設置され，図 1 (b) に示したように回路を構成する．座標軸は，金属板に平行な面が $xy$-平面になり，導波管の中心軸に沿った方向が $z$-軸になるように設ける．導波管の $x$-軸に沿った寸法を $a$ とすると，$x = \pm a/2$ に金属壁が存在していることになる．マイクロ波はネットワークアナライザから変換器の一方を経てスリットに入力され，一部が他方の変換器を経て再びネットワークアナライザに戻る．

本論文では，$\mathrm{TE}_{10}$ モードが入射している場合を考え，導波管内において電界が $y$-軸方向に偏光し角周波数 $\omega$ で振動していると仮定する．このとき，$y$-軸方向の電界 $E_y$ を時間 $t$ と虚数単位 $i$ を用いて $E_y = \Phi(z,x)e^{-i\omega t}$ と表現できる．また，マイクロ波の複素振幅 $\Phi(z,x)$ は偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi + \omega^2\mu_0\epsilon\Phi = 0, \tag{1}$$

を満たす．透磁率は，空間的に一様で真空での値 $\mu_0$ をもつと仮定する．スリット材料の特性は，誘電率 $\epsilon$ によって表現されるが，スリットの開口部が $y$-軸方向に縦長に設けられていることから，$\epsilon$ は $(z,x)$ のみに依存する．散乱ポテンシャル $v(z,x)$ を，$v(z,x) = \omega^2\mu_0\{\epsilon(z,x) - \epsilon_0\}$ で定義すると，基礎方程式 (1) は，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi + v(z,x)\Phi + \omega^2\mu_0\epsilon_0\Phi = 0, \tag{2}$$

と書き換えることができる．ここで，$\epsilon_0$ は真空の誘電率である．散乱体であるスリットの電気電導率を $\sigma$ とすると，散乱ポテンシャル $v(z,x)$ は

$$v(z,x) = \begin{cases} 0, & (z,x) \notin \text{散乱体} \\ i\omega\mu_0\sigma, & (z,x) \in \text{散乱体} \end{cases}, \tag{3}$$

である．より厳密には，材料の誘電率 $\epsilon_m$ に起因する実数部分 $\omega^2\mu_0(\epsilon_m - \epsilon_0)$ も存在するが，マイクロ波の周波数帯では数値的に無視することができる．

導波管の側壁は完全導体であると仮定して，側壁の位置 $x = \pm a/2$ における複素振幅に対して

$$\Phi(z, \pm a/2) = 0, \tag{4}$$

を境界条件として課した．図 1 に示したような導波管内でのマイクロ波散乱では，$x$-軸に関する空間反転に関してシステムが対称性をもっているので，この対称性を利用して境界条件を満たす定式化を行う．

### 2.2　界の $x$-軸方向に関する展開

方程式 (2) には，界の量として複素振幅 $\Phi(z,x)$ と散乱ポテンシャル $v(z,x)$ が現れている．これらを $x$-軸に関し級数展開し

$$\Phi(z,x) = \sum_p \varphi_p(z)e^{i(k_x+G_p)x}, \tag{5}$$

$$v(z,x) = \sum_p v_p(z)e^{iG_p x}, \tag{6}$$

と表現する．ここで，$x$-軸方向の展開領域を $|x| \le L/2$ とすると $G_p = 2\pi p/L$ $(p = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ である．本論文では，$x$-軸方向のシステムサイズ $L$ を導波管の $x$-軸方向の寸法 $a$ とした場合を主に論じる．また，$L$ をスリットの周期に選ぶと数値計算の効率をあげ得ることを付録で言及する．展開式 (5) において基底関数に定数 $k_x$ がパラメータとして含まれており，一般的なフーリエ解析で用いられている基底関数に工夫が施されている．

パラメータ $k_x$ が如何なる値であっても，展開式 (5)

の収束性が変化しないことを付録 **1.** に示した．この任意性を利用して，問題に即してパラメータ $k_x$ の値を決めると，入射波や散乱波（反射波，透過波）の展開を効率的に行うことができる．例えば，$x$-軸に対して斜めに平面波が入射している場合は，パラメータ $k_x$ を有効に活用できる．また，空間反転 $x \to -x$ を展開係数 $\varphi_p(z)$ の指標 $p$ の変換で表現する方法は，$k_x = 0$ ならば $p \to -p$ であり直観的な変換でもあるが，$k_x = \pi/a$ のときにも単純な変換 $p \to -p-1$ により表現できる．図 1 のように，$x = \pm a/2$ に導波管の側壁が存在し空間反転に対してシステムが対称性を有している場合は，側壁が完全導体であるという境界条件 (4) を満たすために $k_x = \pi/a$ と選ぶとよい（なお，$k_x = -\pi/a$ と選ぶことも可能）．このことを付録 **2.** に示したが，その証明は $\cos[(k_x+G_p)a/2] = 0$ であることを利用している．以下に，入射波である $\mathrm{TE}_{10}$ モードを例として，$k_x = \pi/a$ と選ぶことの利点と効率性について説明する．

入射波である $\mathrm{TE}_{10}$ モードを式 (5) で展開した場合，複素振幅 $\Phi_{in}(z,x)$ は振幅を無次元化すると

$$\Phi_{in}(z,x) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{ik_0 z}, \tag{7}$$

$$k_0 = [\omega^2\mu_0\epsilon_0 - (\pi/a)^2]^{1/2}, \tag{8}$$

と表現でき，二つの平面波 $e^{i(\pm\pi x/a + k_0 z)}$ の重ね合わせとみなすことができる．この入力波 $\Phi_{in}$ を展開式 (5) により展開すると，その展開係数 $\varphi_{in,p}(z)$ は，付録 **1.** に示した (A·1) より得ることができ，

$$\varphi_{in,p}(z) = (\delta_{p,0} + \delta_{p,-1})e^{ik_0 z}, \tag{9}$$

となる．ここで，$\delta_{p,q}$ はクロネッカのデルタである．この表現は，入力波を有限項で厳密に展開できるという意味で効率的な表現である．一方，$k_x \neq \pm m\pi/a$（$m$ は奇数）の場合には，この効率性は失われてしまう．実際に展開係数 $\varphi_{in,p}(z)$ を求めると

$$\varphi_{in,p}(z) = \frac{4\pi\cos[(k_x+G_p)a/2]}{\pi^2 - (k_x+G_p)^2a^2}e^{ik_0 z}, \tag{10}$$

であるが，展開の精度を高めるためにはこれらの項を十分に大きな個数だけ加算しなければならないからである．更に，(10) を用いた複素振幅の表現が境界条件 (4) を満たしてはいるが，$\cos[(k_x+G_p)a/2] \neq 0$ であることにより付録 **2.** の議論が適用できない．このことは，散乱波（透過波あるいは反射波）を級数に展開する場合でも同じであり，$k_x \neq \pi/a$ の場合には展開係数 $\varphi_p(z)$ に新たに拘束条件を課すなどして境界条件 (4) を満たす定式化を行う必要がある．一方，$k_x = \pi/a$ とすると付録 **2.** の議論が成立することより，このような定式化が不要であり，数値計算に関する効率の面でも有利である．

### 2.3　逐次伝達法

展開式 (5)，(6) を基礎方程式 (2) に代入することで，偏微分方程式を，次のように 2 階の常微分方程式に変換することができる．

$$\frac{d^2}{dz^2}\varphi_p(z) + \omega^2\mu_0\epsilon_0\varphi_p(z) + \sum_q [v_{p-q} - (k_x+G_p)^2\delta_{p,q}]\varphi_q(z) = 0. \tag{11}$$

この常微分方程式に対して離散化手順である Numerov スキーム [9] を適用すると，微分方程式 (11) を 2 階の差分方程式

$$a_n\mathbf{\Psi}(z_{n+1}) + b_n\mathbf{\Psi}(z_n) + c_n\mathbf{\Psi}(z_{n-1}) = 0, \tag{12}$$

に変換することができる [10]．このとき，$z$-軸方向の解析領域を区間 $[z_0, z_N]$ であるとして，座標値を分割幅 $h$ で $N$ 分割し $z_n = z_0 + nh$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, N)$ と離散化した．マイクロ波の入力端及び出力端の位置座標である $z_0$ と $z_N$ は，散乱体であるスリットを挟んでいるならば導波管内の任意の位置に設けることが可能である．縦ベクトル $\mathbf{\Psi}(z)$ は展開係数 $\varphi_p(z)$ を成分とするベクトル $\mathbf{\Psi}(z) = (\ldots, \varphi_{-1}(z), \varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots)^T$ であり，これを今後 $\mathbf{\Psi}(z) = \{\varphi_p(z)\}$ と略記し振幅ベクトルと呼ぶことにする．係数行列 $a_n$，$b_n$，$c_n$ は，行列

$$V_n = \left[v_{p-q}(z_n) + \{\omega^2\mu_0\epsilon_0 - (k_x+G_p)^2\}\delta_{pq}\right], \tag{13}$$

を用いて，次のように定義される．

$$a_n = I + \frac{h^2}{12}V_{n+1}, \tag{14}$$

$$b_n = -2I + \frac{5h^2}{6}V_n, \tag{15}$$

$$c_n = I + \frac{h^2}{12}V_{n-1}. \tag{16}$$

ここで，$I$ は $V_n$ と同じ次元をもつ単位行列である．逐次伝達行列 $S_n$ を

$$\mathbf{\Psi}(z_{n+1}) = S_n\mathbf{\Psi}(z_n), \tag{17}$$

で定義すると，差分方程式 (12) から $S_n$ に関する漸化式

$$S_{n-1} = -(a_n S_n + b_n)^{-1} c_n, \tag{18}$$

を導くことができる [7].

散乱体であるスリットが空間的に局在していることから，システムの入出力端につながる領域 $z \leq z_1$ 及び $z \geq z_N$ で，散乱ポテンシャル $v(z,x) = 0$ となるように座標を設定することが可能である．なお，入力端は $z = z_0$ と考えているが，後に導出する (24) を得るためには $z \leq z_1$ とする必要がある．これらの領域は散乱がない自由な空間であるので，常微分方程式 (11) の一次独立な二つの解を解析的に求めることができる．この解は，波数

$$k_p = [\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - (k_x + G_p)^2]^{1/2}, \tag{19}$$

と複素定数 $\psi_p$ を用いて，$\varphi_p(z) = e^{\pm i k_p z}\psi_p$ と表現することが可能である．以上の結果を用いて，自由な空間における一次独立な二つの振幅ベクトル $\mathbf{\Psi}(z_n)$ を複号 $\pm$ を用いて表現すると

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}(z_n) &= \{e^{\pm i k_p z_n}\psi_p\} \\ &= K_\pm^n \mathbf{\Psi}_0,\end{aligned} \tag{20}$$

となる．ここに，$K_\pm$ は対角行列であり

$$K_\pm = \left[e^{\pm i h k_p}\delta_{pq}\right], \tag{21}$$

と定義されている．また，$\mathbf{\Psi}_0 (= \{\psi_p e^{\pm i k_p z_0}\})$ は定数ベクトルである．同様に，$n \leq 1$，$n \geq N$ において差分方程式 (12) の一次独立な解を直接求めることも可能である．しかし，その解は $z$-軸の分割幅 $h$ の四次の精度で (20) に一致することが示されている [9]．したがって，差分方程式 (12) の一次独立な解を (20) で代用する．

散乱体が $z_1 < z < z_N$ の間に存在する場合の散乱問題では，マイクロ波が $z < z_1$ の領域から $z$-軸の正の方向に沿って入射していると仮定できる．この場合，$n \leq 1$ では入射波と反射波，$n \geq N$ では透過波のみが存在する．したがって，入射波，反射波，透過波の振幅を成分とするベクトルをそれぞれ $\mathbf{\Psi}_{in}$，$\mathbf{\Psi}_{rf}$，$\mathbf{\Psi}_{tr}$ とすると

$$\mathbf{\Psi}(z_n) = \begin{cases} K_+^n \mathbf{\Psi}_{in} + K_-^n \mathbf{\Psi}_{rf}, & (n \leq 1) \\ K_+^{(n-N)} \mathbf{\Psi}_{tr}, & (n \geq N) \end{cases}, \tag{22}$$

と表現することが可能である．ここで，$n < 0$ に対して，$K_\pm^n = (K_\pm^{-1})^{|n|}$ で定義する．また，$K_\pm^0 = I$ である．この透過波に対する表現から逐次伝達行列 $S_n$ が満足すべき境界条件を求めると，未知量である透過波の振幅ベクトル $\mathbf{\Psi}_{tr}$ を含まない形で

$$S_N = K_+, \tag{23}$$

と表現することができる．より広くは，$S_n = K_+$ $(n \geq N)$ が成立する．なお，境界条件 (23) は，出力端につながる領域において誘電率の空間分布が $z$-軸方向に依存しない場合にも拡張できる一般的なものである．

境界条件 (23) と漸化式 (18) から，すべての逐次伝達行列 $S_n$ $(n < N)$ を決定することができる．反射波の振幅ベクトル $\mathbf{\Psi}_{rf}$ は，$\mathbf{\Psi}(z_1) = S_0 \mathbf{\Psi}(z_0)$ を書き換えた条件 $K_+ \mathbf{\Psi}_{in} + K_- \mathbf{\Psi}_{rf} = S_0(\mathbf{\Psi}_{in} + \mathbf{\Psi}_{rf})$ から決定でき，

$$\mathbf{\Psi}_{rf} = -(S_0 - K_-)^{-1}(S_0 - K_+)\mathbf{\Psi}_{in}, \tag{24}$$

と入射波の振幅ベクトル $\mathbf{\Psi}_{in}$ を用いて表現できる．更に，任意の位置 $z_n$ での振幅ベクトルは，入力端 $z = z_0$ における振幅ベクトルの値 $\mathbf{\Psi}(z_0) = \mathbf{\Psi}_{in} + \mathbf{\Psi}_{rf}$ を用いて，

$$\mathbf{\Psi}(z_n) = S_{n-1} \cdots S_2 S_1 S_0 \mathbf{\Psi}(z_0), \tag{25}$$

と表すことができる．特に $n = N$ とすることで，透過波の振幅ベクトル $\mathbf{\Psi}_{tr}$ が

$$\mathbf{\Psi}_{tr} = S_{N-1} \cdots S_2 S_1 S_0 \mathbf{\Psi}(z_0), \tag{26}$$

であることを導出できる．以上により，反射波及び透過波の振幅ベクトル $\mathbf{\Psi}_{rf}$，$\mathbf{\Psi}_{tr}$ を，入射波の振幅ベクトル $\mathbf{\Psi}_{in}$ と関連づけることができた．

### 2.4 反射率及び透過率

入射波として $TE_{10}$ モードが入射している場合は，(9) から入射波の振幅ベクトル $\mathbf{\Psi}_{in}$ は，

$$\mathbf{\Psi}_{in} = \{(\delta_{p,0} + \delta_{p,-1})e^{i k_0 z_0}\}, \tag{27}$$

となる．この式が，入力端 $(z = z_0)$ における境界条件である．出力端 $(z = z_N)$ での境界条件 (23) が，逐次伝達行列に関する条件であるのに対して，入力端での境界条件は，振幅ベクトルに関する条件として (27) で表現されている．この入力に対する応答である，反射波，透過波の振幅ベクトルを，それぞれ $\mathbf{\Psi}_{rf} = \{r_p\}$，$\mathbf{\Psi}_{tr} = \{t_p\}$ と表すことにする．

時間 $t$ 及び空間軸 $x$ で平均化したポインティングベクトルの $z$ 成分でエネルギー流束を定義する．電界が $y$-軸方向のみに成分をもっておりその複素振幅が $\Phi(z,x)$ である場合，マイクロ波の $z$-軸方向のエネルギー流束 $J_z$ は，

$$J_z = \frac{1}{2\omega\mu_0}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{Im}\left[\Phi^* \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]\frac{dx}{a}, \tag{28}$$

と表現できる．ここで，$a$ は導波管の幅，$^*$ は複素共役，Im は虚部を示す．このとき，入射，反射，透過それぞれのエネルギー流束 $J_{in}$，$J_{rf}$，$J_{tr}$ を定義式 (28) から求めると，

$$J_{in} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\cos\theta, \tag{29}$$

$$J_{rf} = \sum_{p'} \frac{\mathrm{Re}[k_{p'}]}{2\omega\mu_0}|r_{p'}|^2, \tag{30}$$

$$J_{tr} = \sum_{p'} \frac{\mathrm{Re}[k_{p'}]}{2\omega\mu_0}|t_{p'}|^2, \tag{31}$$

と振幅ベクトルの成分で表現することができる．ここで，Re は複素数の実部を示す．なお，$\mathrm{Re}[k_{p'}] = 0$ となる項はエネルギーの流れを伴わず，指標 $p'$ に関する総和からも実質的に除かれる．また，$\cos\theta = (1 - k_x^2/\omega^2\mu_0\epsilon_0)^{1/2}$ であり，入射波である $\mathrm{TE}_{10}$ モードを構成する平面波が $z$-軸に対して $\theta$ だけ傾いて入射していることから得られる項である．これらのエネルギー流束を用いて，透過率 $T$ と反射率 $R$ をそれぞれ $T = J_{tr}/J_{in}$ 及び $R = J_{rf}/J_{in}$，で定義することができる．

散乱体による作用のために，反射波及び透過波の振幅ベクトル $\boldsymbol{\Psi}_{rf}$ と $\boldsymbol{\Psi}_{tr}$ に $\mathrm{Im}[k_p] \neq 0$ となる $p$-成分を含む可能性がある．この成分は，散乱体（スリット）から離れるに従い次第に減衰するがシステムの入出力端 $z = z_0, z_N$ $(n = 0, N)$ にまで達する可能性がある．数値計算法として広く普及している有限要素法では，$\mathrm{Im}[k_p] \neq 0$ である成分すなわち定在波を一般的に取り除くことは難しい．このため，有限要素法で反射率や透過率を正確に求めるためには，入出力端を散乱体から十分遠くに設ける必要があり計算量が増加する傾向がある．一方，逐次代入法ではこのことに関する考慮は不要である．その理由は，$\mathrm{Im}[k_p] \neq 0$ となる定在波は，定義式 (19) より $\mathrm{Re}[k_p] = 0$ であるためにエネルギー流束を担わず，計算式 (30)，(31) から実質的に取り除かれているためである．

## 3. 透過率の計測と解析結果の比較

逐次伝達法の解析方法の有効性を実証的に検討するため，金属板を材料とするスリットにマイクロ波を入射させ透過率をネットワークアナライザで計測した．既に図 1 に示したように，スリットは一対の導波管の中央に設置されている．導波管は，EIC 規格 WR62 に準拠したもので，その寸法が $15.8\,\mathrm{mm} \times 7.9\,\mathrm{mm}$ であり，周波数帯域 12.4 GHz から 18 GHz に対応している．また，同軸導波管変換器は Agillent 社製 P281C であり，定在波比 (SWR) が 1.06 以下であることが保障されている．

スリットはステンレス製で抵抗率 $72 \times 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$ である．開口部の形状は，導波管の短軸（$y$-軸）に平行な幅 $D = 1.1\,\mathrm{mm}$ の縦長な長方形である．また，開口部に挟まれた金属の柱は，幅 $W = 0.5\,\mathrm{mm}$ で厚さ $L_W = 0.5\,\mathrm{mm}$，$1.0\,\mathrm{mm}$ の 2 種類である．

数値計算に際して，$x$-軸方向のフーリエ展開は，システムサイズ $L$ を $L = a$ とし，サンプリング数 $N_G = 401$ の離散フーリエ展開で代用した．厚さ $L_W$ のスリットを挟んで，長さ $L_{edge} = 0.6\,\mathrm{mm}$ の緩衝領域が設けられているとして，$z$-軸方向の解析領域の長さ $L_{tot}$ を $L_{tot} = L_W + 2L_{edge}$ とした．更に，$z_0 = -L_{edge}$，$z_N = L_W + L_{edge}$ として，この間を分割数 $N = 140$ で離散化した．分割数 $N_G$，$N$ の大きさは，それらを各々50%変化させても透過率 $T$ への影響がともに 3%以内であるように決めた．

図 2 は，スリット近傍の電界 $E_y$ の大きさを，等高線で示した図であり，破線はスリットを構成する金属柱である．導波管の金属壁が，$x = \pm 7.9\,\mathrm{mm}$ に存

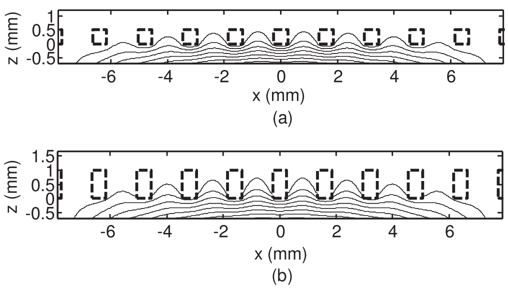


図 2　スリット近傍の電界強度の等高線分布．金属柱の寸法 (a) $0.5\,\mathrm{mm} \times 0.5\,\mathrm{mm}$，(b) $0.5\,\mathrm{mm} \times 1.0\,\mathrm{mm}$

Fig. 2　Contourplots of electric field strength around slit pillars of dimensions (a) $0.5\,\mathrm{mm} \times 0.5\,\mathrm{mm}$, (b) $0.5\,\mathrm{mm} \times 1.0\,\mathrm{mm}$.

在しているために，この近くでの電界強度が弱くなっている．金属柱の内部にも表皮の厚さ程度マイクロ波が侵入するが，その侵入領域はわずかであり図では確認することができない．金属柱のサイズは (a) で 0.5 mm × 0.5 mm，(b) では 0.5 mm × 1.0 mm である．マイクロ波は，$z < 0$ の領域から $z$-軸の正の方向に沿って入射されており，周波数はともに 18 GHz である．出力側にあたる図の上部 ($z > 0$) に等高線が少ないが，これはマイクロ波の通過率が −30 dB 以下と小さなためスリットを通過する波が弱いためである．金属柱を挟んで設けられている長さ $L_{edge}$ の緩衝領域は，導波管の長さ $a$ と比較して 1/10 以下と短いものである．このように緩衝領域を短く設置できることが，逐次伝達法の特徴の一つである．

図 3 において，透過率 $T$ の周波数依存に関し，ネットワークアナライザで得た計測値（細線）と逐次伝達法で得た理論値（太線）を比較した．図中の 0.5 mm × 0.5 mm，0.5 mm × 1.0 mm は，用意した 2 種類の金属柱のサイズである．金属柱の厚さが 0.5 mm から 1.0 mm に増加すると，マイクロ波がスリットを通過する距離が倍になるので，計測及び理論ともに透過率 $T$ が 10 dB 程度低くなっている．更に，計測値と理論値との差が 2 dB 程度に収まっており，周波数依存についてはほぼ実験値を再現している．

スリットによる散乱ポテンシャル $v(z, x)$ は，$x$-軸方向に空間的な周期 $L_{slit} = W + D$ をもつ．この周期を利用すると，解析領域を $|x| < a/2$ から $|x| < L_{slit}/2$ に狭めることができ，計算に必要なメモリ容量及び時間を大幅に減少させることができる．その計算方法の詳細を付録 **3.** に示した．

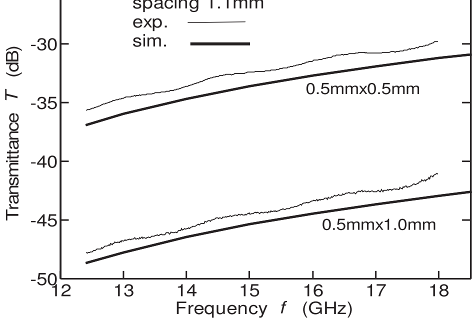


図 3　透過率 $T$ の周波数 $f$ 依存
Fig. 3　Tansmittance rate $T$ vs. frequency $f$.

## 4. む す び

これまで主に個体界面の電子状態の解析に利用されていた逐次伝達法を，電磁波の散乱に応用することを前提として定式化し直した．更に，スリットを通過するマイクロ波の透過率を実験及び理論により求め比較検討した．この結果，透過率の周波数依存性をほぼ完全に理論で再現することができ，逐次伝達法のマイクロ波解析に対する有効性を確認できた．

本論文で論じた定式化には，フーリエ展開の基底関数に横方向の波数パラメータ $k_x$ を追加している．このパラメータは制約のない自由なパラメータなので，問題に即してその値を選ぶことが可能である．導波管において $TE_{10}$ モードがスリットに入射している場合は，二つの平面波がスリットに対して傾斜して入射していると考え得るので，このパラメータ $k_x$ の自由度を活用できる例であった．

逐次伝達法がもっている特徴の一つとして，散乱により複雑なモードが現れても境界での特別な処理を要しないことがある．この性質は，ランダム媒質により複雑な散乱波が発生する場合の解析などに有効である．現在，このような場合の解析を進めており，その結果についても報告したいと考えている．

## 文　　献

[1] 小柴正則，“有限要素法スキームを用いたビーム伝搬法とその光導波路解析への応用，” 信学論（C-II），vol.J82-C-II, no.11, pp.599–608, Nov. 1999.

[2] J. Jin and D.J. Riley, Finite element analysis of antennas and arrays, John Wiley & Sons, Hoboken, 2009.

[3] G. Sztefka and H.P. Nolting, “Bidirectional eigenmode propagation for large refractive index steps,” IEEE Photon. Technol. Lett., vol.5, no.5, pp.554–557, May 1993.

[4] M.D. Feit and J.A. Fleck, “Light propagation in graded-index optical fibers,” Appl. Opt., vol.17, no.34, pp.3990–3998, Dec. 1978.

[5] T. Hosono, T. Hinata, and A. Inoue, “Numerical analysis of the discontinuities in slab dielectric waveguides,” Radio Sci., vol.17, no.1, pp.75–83, Jan.-Feb. 1982.

[6] 宮本徳夫，百田美智子，安元清俊，“フーリエ級数展開法による周期構造 3 次元光導波路の解析，” 信学論（C），vol.J86-C, no.6, pp.591–600, June 2003.

[7] J.A. Appelbaum and D.R. Hamann, “Self-consistent electronic structure of solid surfaces,” Phys. Rev. B, vol.6, no.6, pp.2166–2177, Sept. 1972.

[8] K. Hirose and M. Tsukada, “First-principles calculation of the electronic structure for a bielectrode junc-

tion system under strong field and current," Phys. Rev. B, vol.51, no.8, pp.5278–5290, Feb. 1995.

[9] F.Y. Haji, H. Kobeisse, and N.R. Nassif, "On the numerical solution of Shroedinger's radial equation," J. Computational Physics, vol.16, pp.150–159, 1974.

[10] P. Lambin and J.P. Vigneron, "Improved continued fraction treatment of the one-dimensional scattering problem," J. Phys. A (Math. Gen.), vol.14, pp.1815–1819, 1981.

[11] H. Kato and Y. Kanno, "Microwave absorption of catalyst in a thermal decomposition reaction by recursive transfer metohd," Jpn. J. Appl. Phys., vol.47, no.6, pp.4846–4850, 2008.

[12] 木谷昌経，加藤初弘，"逐次伝達法によるマイクロ波散乱の基礎検討," 2008 信学ソ大（エレクトロニクス），C-1-5, Sept. 2008.

[13] 寺澤寛一，自然科学者のための数学概論，p.151, 岩波書店，東京，1954.

[14] C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 8th ed., p.173, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2005.


# 付　　録

## 1. 級数展開の収束性

展開式 (5) の展開係数 $\varphi_p$ は，両辺に $e^{-i(k_x+G_p)x}$ を乗じて区間 $|x|<L/2$ で積分することにより，次式で与えられることが分かる．

$$\varphi_p = \int_{-L/2}^{L/2} \Phi(x) e^{-i(k_x+G_p)x} \frac{dx}{L}. \qquad \text{(A·1)}$$

ただし，ここでは変数 $z$ を省略して表示した．上式を展開式 (5) の右辺に代入し，インデックス $p$ に関する総和を $|p| \le M-1$ の範囲で行ったものを $S_M$ で表し部分和と呼ぶことにする．このとき，部分和 $S_M$ は，簡単な変形により

$$S_M = \int_{-L/2}^{L/2} \Phi(x') \frac{\sin\left[\frac{2\pi M}{L}(x-x')\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x-x')\right]} \frac{dx'}{L}, \text{(A·2)}$$

と表現できる．展開式 (5) 及び展開係数 (A·1) の表現には，ともにパラメータ $k_x$ を含むが，部分和 $S_M$ には $k_x$ が含まれていない．更に，この部分和はフーリエ級数に関して得られる部分和と同一である．このことから，フーリエ級数の収束性に関する議論 [13] と全く同じ議論が可能である．すなわち，関数 $\Phi(x)$ が区分的に連続である（あるいは Dirichlet 条件を満たす）なら

$$\lim_{M\to\infty} S_M = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2}[\Phi(x+\epsilon)+\Phi(x-\epsilon)], \quad \text{(A·3)}$$

が成立することを導くことが可能である．このことは，展開式 (5) が，任意の $k_x$ に対してフーリエ級数と同じく区分的に連続な関数を表現できることを示している．したがってこの意味で，実用的なほぼすべての関数を展開式 (5) で表現することが可能である．なお，展開式 (5) を用いて導波管における散乱問題を取り扱う場合は，**2.2** に示したとおり $k_x=\pi/a$ と選ぶことが最善の選択である．

## 2. 導波管側壁における境界条件

入力波である $TE_{10}$ モードは (7) と表現でき，二つの平面波 $\Phi_{in\pm}(z,x)=e^{i(\pm\pi x/a+k_0 z)}$ の重ね合わせである．これらの平面波の一方を独立にシステムに入力することは導波管における実験では不可能であるが，理論的には仮想的に実現することができる．そこで，$\Phi_{in\pm}(z,x)$ を入射させた場合に現れる (2) の理論的な解を $\Phi_\pm(z,x)$ で表すと（複合同順），実際の波 $\Phi(z,x)$ は，$\Phi(z,x)=\Phi_+(z,x)+\Phi_-(z,x)$ と二つの波を重ね合わせることで得られる．

散乱波として透過波を考え $\Phi_+(z,x)$ を

$$\Phi_+(z,x) = \sum_p t_p^{(+)} e^{i(k_x+G_p)x+ik_p(z-z_N)}, \text{(A·4)}$$

$(z > z_N)$ と表現する．この波は，(27) にある $\{\delta_{p,0}e^{ik_0 z_0}\}$ による応答である．同じ (27) にある入力 $\{\delta_{p,-1}e^{ik_0 z_0}\}$ による応答が $\Phi_-(z,x)$ であるが，$x$-軸に関する空間反転の対称性から $\Phi_-(z,x)=\Phi_+(z,-x)$ が成立する．したがって，入力波 (7) による応答である透過波 $\Phi_{tr}$ は，$\Phi_+(z,x)$ と $\Phi_+(z,-x)$ を重ね合わせることにより

$$\Phi_{tr}(z,x) = \sum_p t_p^{(+)} e^{ik_p(z-z_N)} 2\cos[(k_x+G_p)x], \qquad \text{(A·5)}$$

と表現することができる．ここで，$k_x=\pi/a$ であり，$x$-軸方向のシステムサイズ $L$ は $L=a$ である．

なお，$-(k_x+G_p)=k_x+G_{-p-1}$ という恒等式を，対称性を表す関係式 $\Phi_-(z,x)=\Phi_+(z,-x)$ の右辺の級数表現に用いると

$$\Phi_-(z,x) = \sum_p t_{-p-1}^{(+)} e^{i(k_x+G_p)x+k_p(z-z_N)} \qquad \text{(A·6)}$$

を得ることができ，$\Phi_+(z,x)$ のみならず $\Phi_-(z,x)$ も (5) で展開可能であることが分かる．したがって，(31) に現れる $t_p$ を $t_p=t_p^{(+)}+t_{-p-1}^{(+)}$ と表現できる．

展開式 (A·5) は，$\cos[(k_x + G_p)a/2] = 0$ であることから $\Phi_{tr}(z, \pm a/2) = 0$ を満たしている．すなわち，導波管内での $x$-軸に関する空間反転に対して対称性な散乱現象では，$k_x = \pi/a$ として展開式 (5) により複素振幅を表すことで，導波管の側壁が完全導体であるという境界条件が満たされる．同じ議論により，透過波のみならず反射波も完全導体に対する境界条件を満足していることが分かる．

### 3. スリットの周期性を利用した数値計算の効率化

スリットが $x$-軸方向に周期 $L_{slit}$ をもち，しかも $L_{slit}$ の自然数倍が $a$ である場合，$\Phi_+(z, x)e^{-ik_x x}$ が $x$ の関数として周期 $L_{slit}$ をもつことを利用すると数値計算の効率を大幅に改善することができる．ここで，$\Phi_+(z, x)$ は平面波 $\Phi_{in+}(z, x) = e^{i(\pi x/a + k_0 z)}$ を入力したときに現れる (2) の解である．この理論的な背景についてまとめる．

散乱ポテンシャル $v(z, x)$ は，スリットの形状を反映して決まる量なので，$x$ の関数として $L_{slit}$ を周期としている．したがって，展開式 (6) において $L = L_{slit}$ と置くことは可能である．一方，$\Phi_+(z, x)$ は，$x$ の関数として $L_{slit}$ を周期としないが，$\Phi_+(z, x)e^{-ik_x x}$ は $L_{slit}$ を周期としている．その理由は，基礎方程式 (2) と入力波から作った関数 $\Phi_{in+}(z, x)e^{-ik_x x}$ が，$x \to x + L_{slit}$ という変換に対してともに不変であること，及び，$L = L_{slit}$ としても (A·5) が成立することから透過波（より一般には散乱波）が $x = \pm a/2$ において完全導体の境界条件を満足するからである．方程式 (2) の解は，境界条件が決まれば一意に決まるので，$L = L_{slit}$ と制限したとしても解が得られたならそれが求める解である．

実際に $\Phi_+(z, x)e^{-ik_x x}$ が，変数 $x$ の関数として周期 $L_{slit}$ をもっていることを数値的に確かめた結果が図 A·1 である（計算条件は，図 2 (a) のときに用いたものと同じであり $L = a$ とした）．このことは，結晶中の電子波の状態である Bloch 状態 [14] と類似した状態にマイクロ波があることを示している．実験で使用したスリットは図に破線で示したようなものであり，議論の前提（$a/L_{slit}$ = 自然数）が厳密には成立しない．しかし，その影響は図 A·1 でほとんど現れないほどにわずかである．

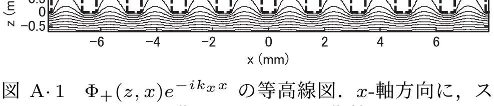


図 A·1　$\Phi_+(z, x)e^{-ik_x x}$ の等高線図．$x$-軸方向に，スリットの周期 $L_{slit}$ と同じ周期性をもつ．

Fig. A·1　Contourplot of $\Phi_{+(z,x)}e^{-ik_x x}$, which has periodicity equivalent to slit period $L_{slit}$ along $x$-axis.

システムサイズ $L$ を $L = L_{slit}$ として透過波を (A·5) で表現し，エネルギー流束の表現 (28) に代入すると，

$$J_{tr} = \sum_{p,q} \mathrm{Im}\left[\frac{t_p^{(+)*}t_q^{(+)}ik_q}{\omega\mu_0}\int_{-a/2}^{a/2}\left\{\cos[G_{q-p}x] + \cos[(2k_x + G_{p+q})x]\right\}\frac{dx}{a}\right], \quad \text{(A·7)}$$

を得る．ここで，$\cos[G_{q-p}x]$ に関する積分からクロネッカのデルタ $\delta_{pq}$ が得られる．また，$k_x = \pi/a$，$G_p = 2\pi p/L_{slit}$，$a/L_{slit} = N_{slit}$（自然数）であることから，$\cos[(2k_x + G_{p+q})x]$ に関する積分は消失する．したがって，エネルギー流束に関する表現として

$$J_{tr} = \sum_p \frac{\mathrm{Re}[k_p]}{\omega\mu_0}|t_p^{(+)}|^2, \quad \text{(A·8)}$$

が得られる．この式は，入力波の振幅ベクトルとして (7) を用いる代わりに，平面波 $\Phi_{in+}(z, x) = e^{i(\pi x/a + k_0 z)}$ に対応する振幅ベクトル $\Psi_{in+} = \{\delta_{p,0}e^{ik_0 z_0}\}$ を入力として求めた係数 $t_p^{(+)}$ を用いてもエネルギー流束を求めることが可能であることを示している．このこと自体は，数値計算の効率化と直接的には関係していない．しかし，展開式 (A·4)（あるいは (5)）においてシステムサイズ $L$ を $L = L_{slit}$ とできることと組み合わせると数値計算を効率化できる．その理由は，解析する $x$-軸方向の領域を狭くすることができるからである．なお，入射波のエネルギー流束は，(29) で求めることができる．

実際にシステムサイズを $L = L_{slit}$，$x$-軸の分割数 $N_G$ を $N_G = 41$ として，展開係数 $t_p^{(+)}$ から求めた透過率 $T$ を，$L = a$，$N_G = 401$ として求めた図 3 の値と比較した．その結果，両者の違いは 1%以下とわずかであった．このように散乱体（スリット）の周期性を利用すると，分割数 $N_G$ を図 3 を求めたときのほぼ 1/10 にすることができ，計算に要するメモリと時間を大幅に削減することができる．

（平成 22 年 4 月 11 日受付，5 月 19 日再受付）

**加藤　初弘**　（正員）

1987 北大・工・応用物理学専攻博士課程了．1987（株）東芝入社．総合研究所勤務．1999 山梨大学工学部助教授（現，准教授）．デバイス物理・システム設計などに関連してマイクロ波現象などを研究．

**木谷　昌経**

2007 山梨大・工卒．同年，同大大学院修士課程進学．現在，博士課程に在籍．マイクロ波の医用工学的応用を研究．

**加藤　初儀**

1984 北大・工・応用物理学専攻修士課程了．1998 博士（工）を北大より取得．日本電気（株）半導体事業本部勤務を経て，現在苫小牧高専教授．電磁波やフォノンなどを含め広く散乱現象に興味をもつ．