弱形式離散化スキーム逐次伝達法を用いた散乱問題の数値解析手法の提案

加藤　初弘[1),] 加藤初儀　[2)]

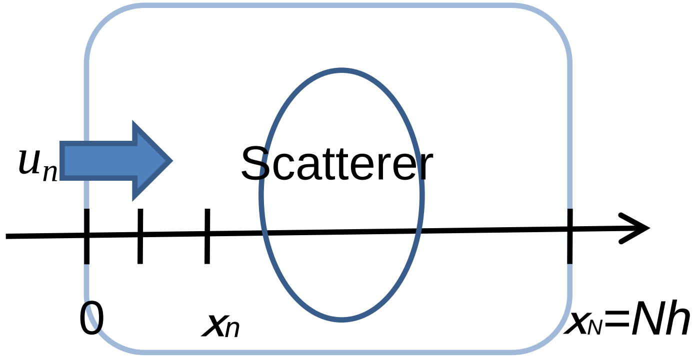
1）山梨大学　総合研究部
2）苫小牧高専　　　　.

第44回　数値解析シンポジウム
2015.6.8-10 (発表 8. June)
山梨県　甲州市（勝沼　ぶどうの丘）

離散化（Numerov法）

■　2階微分方程式

$$u''(x) + v(x)\, u(x) = 0$$



■　2階差分

$$u(x+h)\text{-}2u(x) + u(x\text{-}h) = 2\frac{h^2}{2!}u''(x) \;+2\frac{h^4}{4!}u''''(x) \;+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

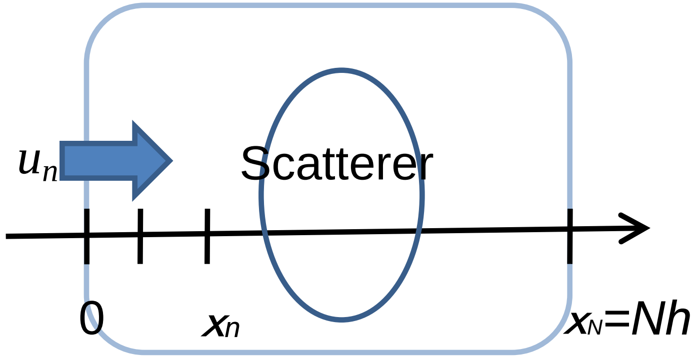
$$=\text{-}\;\frac{h^2}{12}v(+xh)u(x+h)\;\text{-}\;\frac{5h^2}{6}v(x\;u(x)\;+\frac{h^2}{12}v(x\text{-}h)\;u(x\text{-}h)$$

$$+\;\mathrm{o}(h^6)$$

離散化（Numerov法）

■ 2階微分方程式

$$u''(x) + v(x)\,u(x)$$



■ 2階差分

$$u(x+h)-2u(x) + u(x-h) = 2\frac{h^2}{2!}u''(x) \ +2\frac{h^4}{4!}u''''(x) \ + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$=- \frac{h^2}{12}v(+xh)u(x+h) - \frac{5h^2}{6}v(x\ u(x) + \frac{h^2}{12}v(x-h)\ u(x-h)$$

$$+ \mathrm{o}(h^6)$$

■ 2階差分方程式

$$a_n\, u(x_{n+1}) + b_n\, u(x_n) + c_n\, u(x_{n-1}) \quad = 0$$

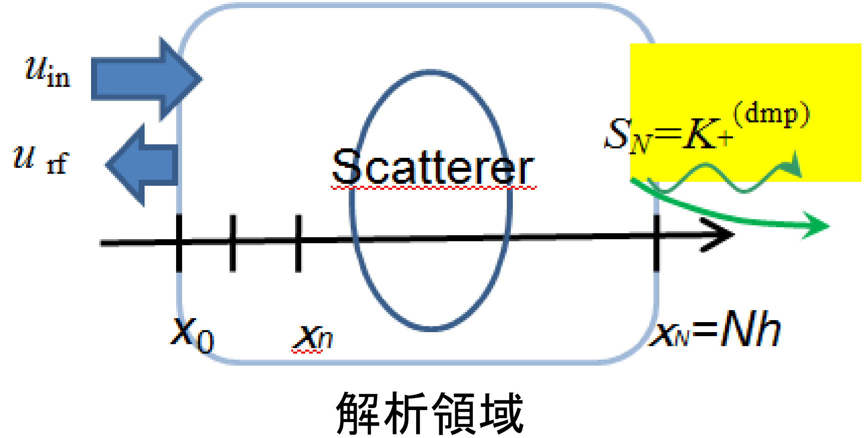
$$a_n = 1+ \frac{h^2}{12}v(x_{\,n+1}),\ b_n = -2+ \frac{5h^2}{6}v(x_n),\ c_n = 1+ \frac{h^2}{12}v(x_{\,n-1})$$

伝達行列S_nとRTM（逐次伝達法）

■ 伝達行列（Stepping Matrix）　S_n

$$u(x_{n+1}) = S_n u(x_n)$$

$$u(x_{n-1}) = (S_{n-1})^{-1} u(x_n)$$



$$c_n\, \boldsymbol{u}(x_{n-1}) + b_n\, \boldsymbol{u}(x_n) + a_n\, \boldsymbol{u}(x_{n+1}) = 0$$

$$c_n\, (S_{n-1})^{-1} + b_n + a_n S_n = 0$$

$$S_{n-1} = -(b_n + a_n S_n)^{-1} c_n$$

漸化式

■ RTM-整合ポート境界条件

$$S_N = K_+^{(dmp)}$$

ABC(吸収境界条件)

逐次伝達法(RTM)と散乱問題

- 分子軌道や電子伝導の解析法として始まる:
  RTM（逐次伝達法 Recursive Transfer Method）
  ⇒ 局在波の抽出が可能（ RTM整合ポート境界条件 ）

- RTMの適用範囲を拡大:
  ・空間次元や微分階数の多様さに対応
  ⇒ 弱形式離散化

- Fano効果が現れる共鳴現象に適用:
  ⇒ 周波数に虚数成分

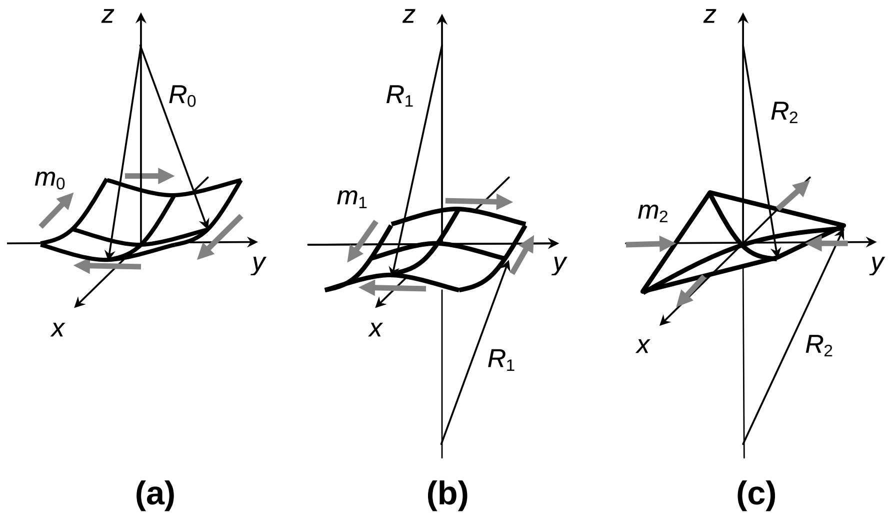
屈曲変位の共変性を分離した運動表現

$u(x,y)$　弾性平板の面に垂直な変位

$$\Delta_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Delta_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\Delta_2 u = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$



座標軸の回転角度θ

$$\Delta_0 u \quad \rightarrow \quad \Delta_0 u$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 u \\ \Delta_2 u \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 u \\ \Delta_2 u \end{bmatrix}$$

エネルギー表現

ポテンシャル　$U[u] = \frac{1}{2}[D_0(\Delta_0 u)^2 + D_1(\Delta_1 u)^2 + D_2(\Delta_2 u)^2]$

運動エネルギー　$K[u] = \frac{\omega^2 b\rho}{2} u^2$

共変な表現

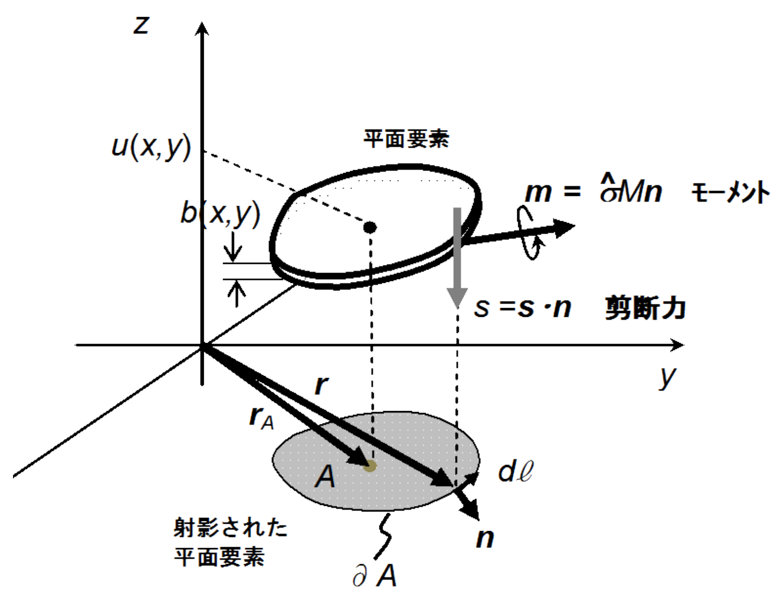
平板のスティフネス定数

$$D_0(x,y) = \frac{Eb^3}{24(1-\nu)} \qquad D_1(x,y) = D_2(x,y) = \frac{Eb^3}{24(1+\nu)}$$

屈曲振動の弱形式表現

停留値問題　　$w(x,y)$　テスト関数

$$F[w,u] = \int_S \{\Delta_0 w D_0 \Delta_0 + \Delta_1 w D_1 \Delta_1 u + \Delta_2 w D_2 \Delta_2\, u - w\,\omega^2 \rho\, bu\}\mathrm{d}S$$



屈曲振動の弱形式表現

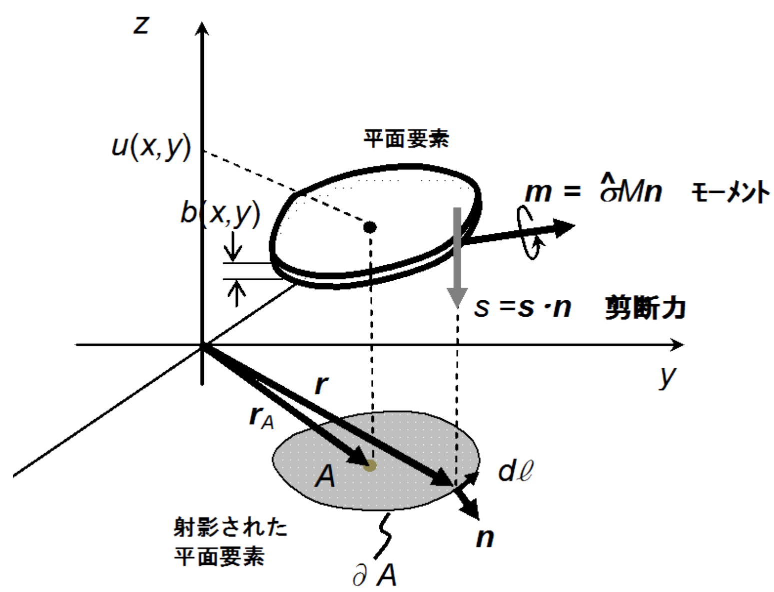
停留値問題

$w(x,y)$　テスト関数

$$F[w,u] = \int_S \{\Delta_0 w D_0 \Delta_0 + \Delta_1 w D_1 \Delta_1 u + \Delta_2 w D_2 \Delta_2 u - w\,\omega^2 \rho\, bu\}\mathrm{d}S$$

$$= \int_S w[\Delta_0(D_0\Delta_0) + \Delta_1(D_1\Delta_1 u) + \Delta_2(D_2\Delta_2 u) - \omega^2 \rho\, bu]\mathrm{d}S$$

$$+ \int_{\partial S} \boldsymbol{n}\cdot[w\,\boldsymbol{s} - M\nabla w]\mathrm{d}l$$



屈曲振動の弱形式表現

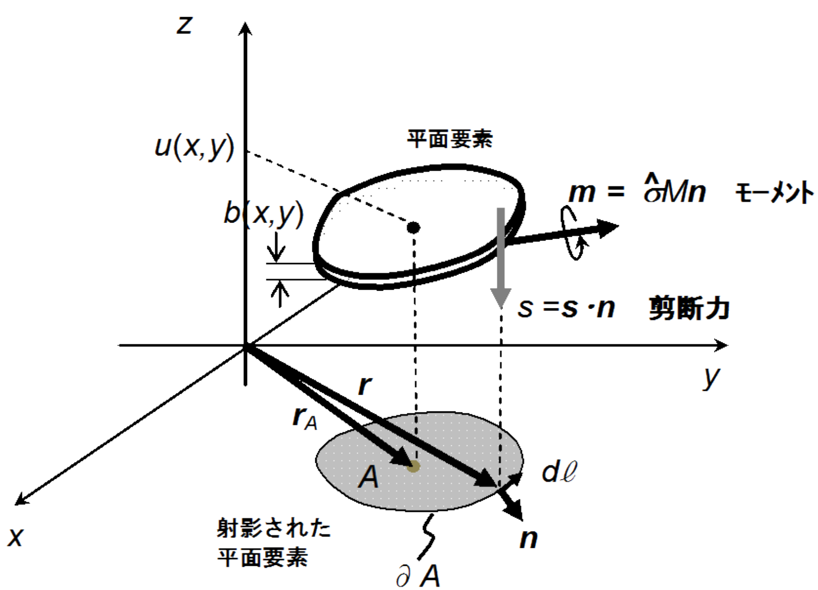
停留値問題　　$w(x,y)$　テスト関数

$$F[w,u] = \int_S \{\Delta_0 w D_0 \Delta_0 + \Delta_1 w D_1 \Delta_1 u + \Delta_2 w D_2 \Delta_2 u - w \omega^2 \rho b u \} dS$$

$$= \int_S w[\Delta_0(D_0\Delta_0) + \Delta_1(D_1\Delta_1 u) + \Delta_2(D_2\Delta_2 u) - \omega^2 \rho b u]dS$$

$$+ \int_{\partial S} \boldsymbol{n}\cdot[w \boldsymbol{s} - M\nabla w]dl$$

$$\Rightarrow 0 \qquad (\forall \ w)$$



重調和方程式の拡張

運動方程式

$$\Delta_0(D_0\Delta_0 u) + \Delta_1(D_1\Delta_1 u) + \Delta_2(D_2\Delta_2 u) - \omega^2 \rho b u = 0$$

エネルギー流束

$$\boldsymbol{J} = \dot{u}\boldsymbol{s} - M\nabla \dot{u}$$

$$= \sum_{r=0}^{2} D_{\mathbf{r}}[\dot{u}(\Delta_{\mathbf{r}}{}^2 u) - (\Delta_{\mathbf{r}}\dot{u})(\Delta_{\mathbf{r}} u)]$$

共変な表現

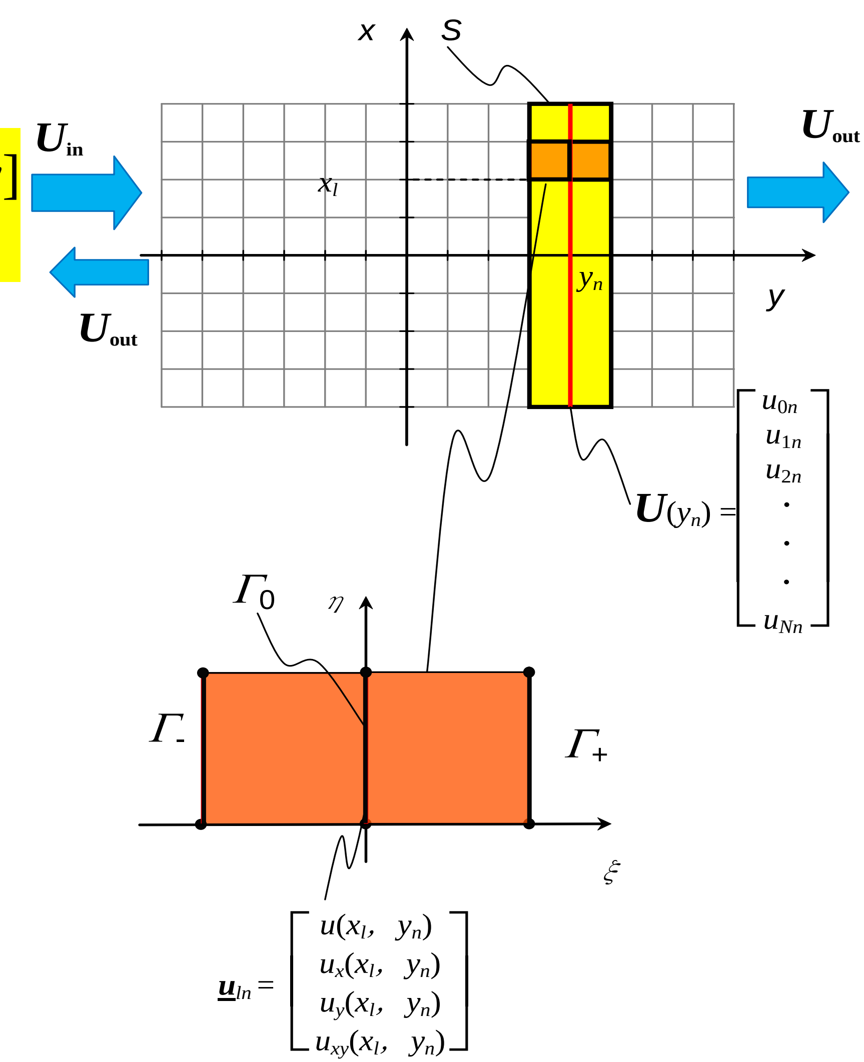
弱形式離散化＝ 境界要素での解の接続 ＝

$$F_{S'_{-}+S'_{+}}[w,u] = \int_{S'_{-}+S'_{+}} \{\text{eq. of motion}\}\, dS$$

$$+ \int_{\Gamma_0} dl\, \left[w(\boldsymbol{s}_{-} - \boldsymbol{s}_{+}) - (M_{-} - M_{+}) \nabla w \right]$$

$$+ \int_{\partial S - \Gamma_0} dl\, \left[w\, \boldsymbol{s} - M \nabla w \right]$$

$$\Rightarrow \quad 0 \qquad (\forall w)$$



弱形式離散化＝ 境界要素での解の接続 ＝

$$F_{S_-+S_+}[w,u] = \int_{S'_- + S'_+} \{\text{eq. of motion}\}\,dS$$

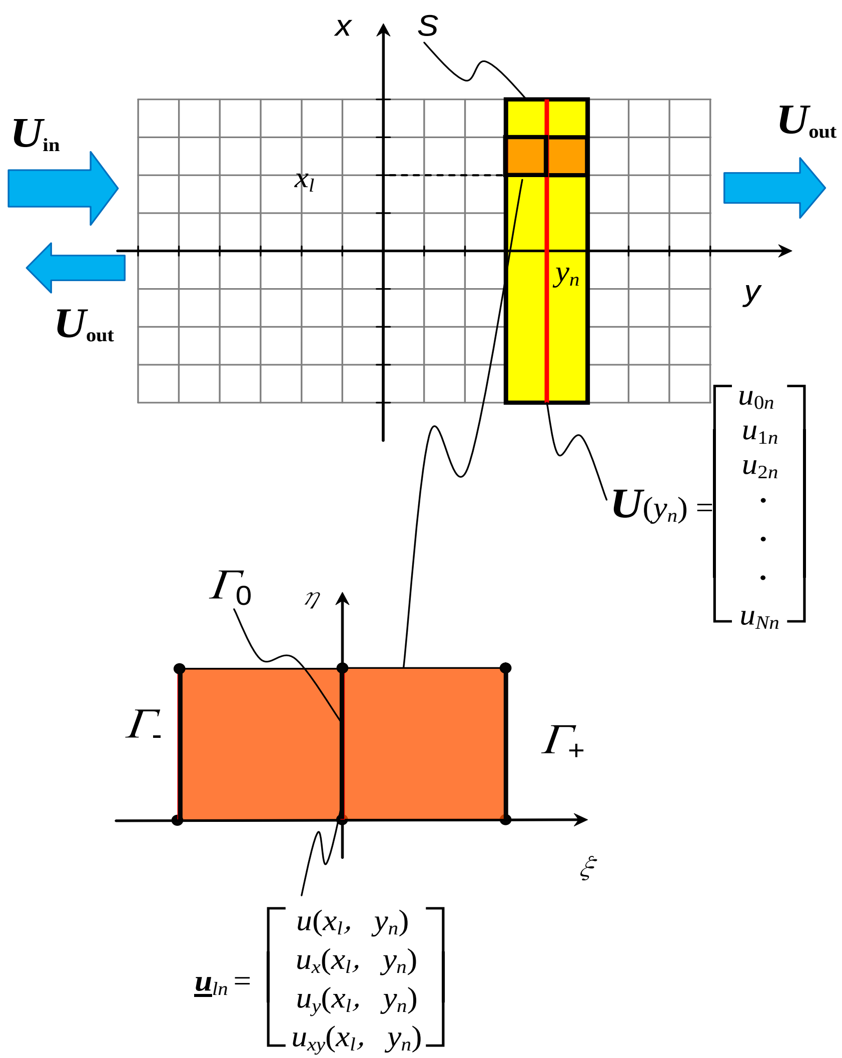
$$+ \int_{\Gamma_0} dl\,[w(\boldsymbol{s}_- - \boldsymbol{s}_+) - (M_- - M_+)\nabla w]$$

$$+ \int_{\partial S - \Gamma_0} dl\,[w\,\boldsymbol{s} - M\nabla w]$$

$$\Rightarrow \quad 0 \qquad (\forall w)$$

■ Γ_0上でw , ∇w が任意 **力学的な条件**

$\boldsymbol{s}_- = \boldsymbol{s}_+$	剪断力が連続
$M_- = M_+$	モーメントが連続



弱形式離散化＝ 境界要素での解の接続 ＝

$$F_{S_-+S_+}[w,u] = \int_{S'_-+S'_+} \{\text{eq. of motion}\}\,dS + \int_{\Gamma_0} dl\,[w(\boldsymbol{s}_- - \boldsymbol{s}_+) - (M_- - M_+)\nabla w] + \int_{\partial S-\Gamma_0} dl\,[w\,\boldsymbol{s} - M\nabla w]$$

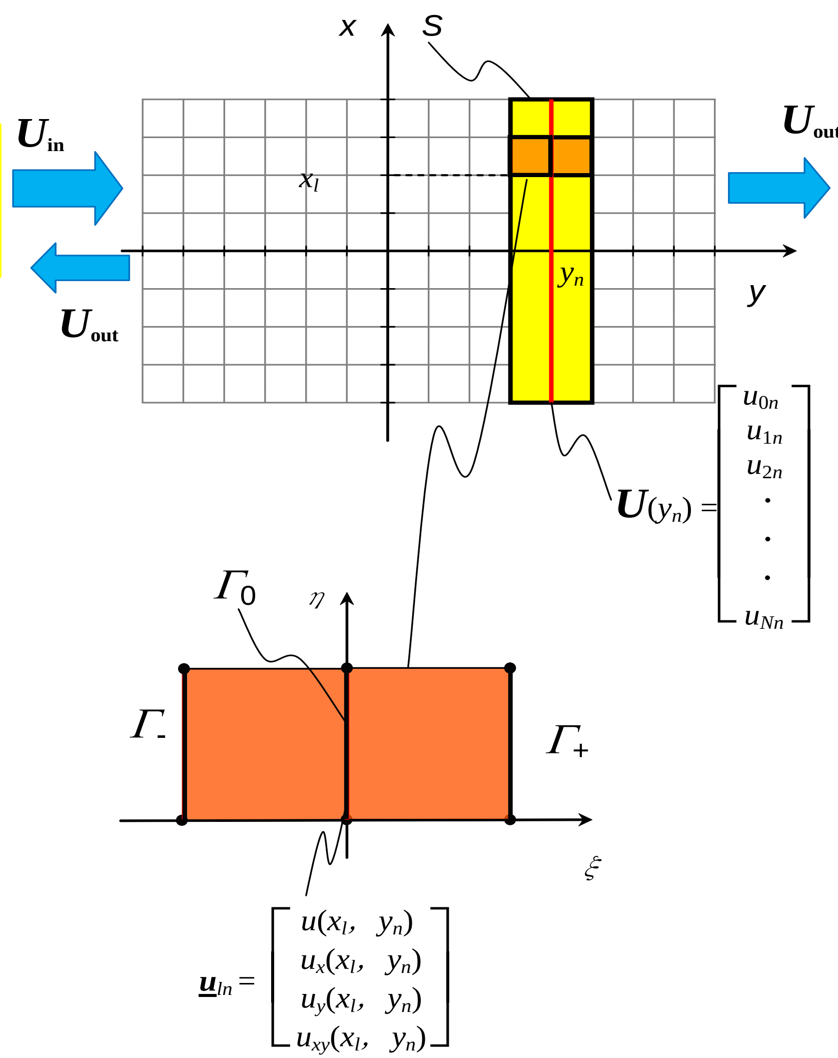
$$\Rightarrow \quad 0 \qquad (\forall w)$$

■ Γ_0上でw , ∇w が任意 **力学的な条件**

$\boldsymbol{s}_- = \boldsymbol{s}_+$	剪断力が連続
$M_- = M_+$	モーメントが連続

■ $\Gamma_\pm$上で $w = \nabla w = 0$ **境界条件の多様さ**

s, M を別途設定可能
⇒ RTM-整合ポート境界条件



要素内補間による差分方程式の導出（その1）

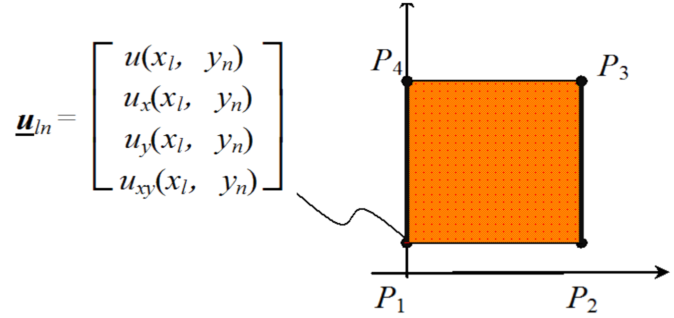
■補間関数

$$u(x,y) = \sum_{p=1}^{4} [\, L_0^{(p)}(x,y)u(\mathrm{P}_p)$$

$$+ L_1^{(p)}(x,y)u_x(\mathrm{P}_p)$$

$$+ L_2^{(p)}(x,y)u_y(\mathrm{P}_p)$$

$$+ L_3^{(p)}(x,y)u_{xy}(\mathrm{P}_p) \,]$$



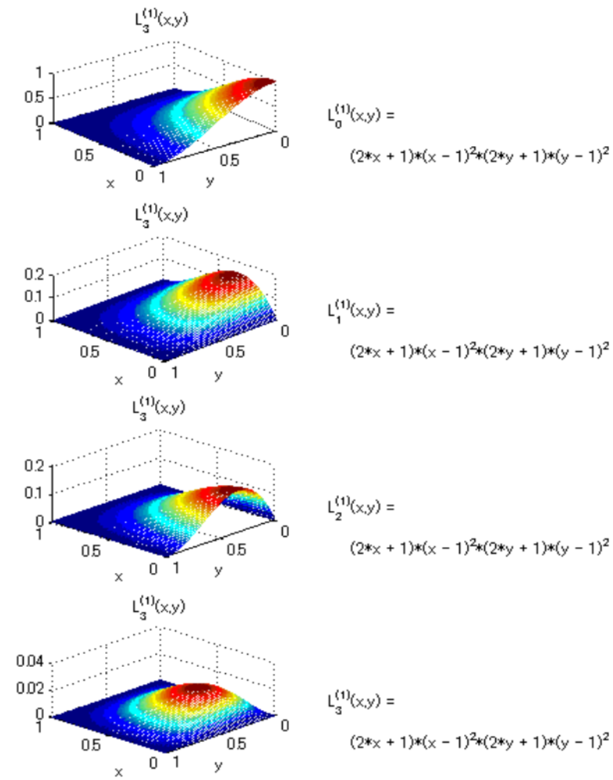
$L_0^{(p)}(x,y)$　6 次の代数多項式

$u(P_p)$　節点 Pp での関数値

$u_x(P_p)$　節点 Pp での導関数値(偏微分).

$u_y(P_p)$,　・・・・

$u_{xy}(P_p)$　・・・・



要素内補間による差分方程式の導出（その2）

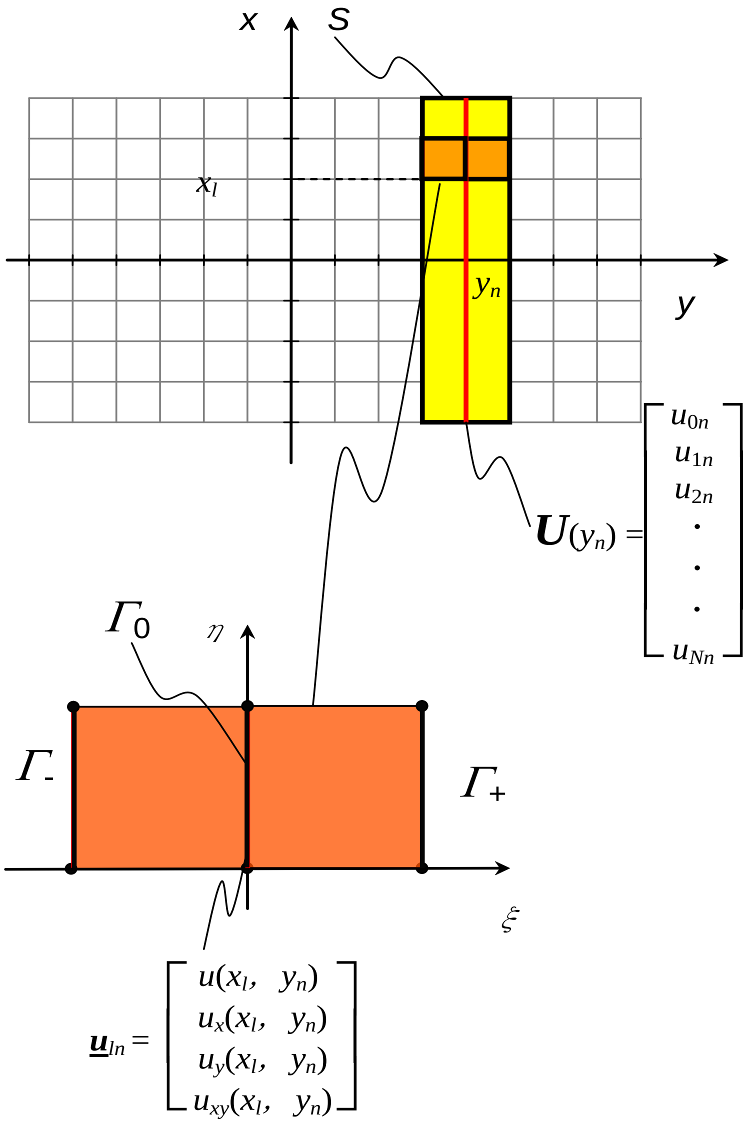
■補間関数

$$u(x,y) = \sum_{p=1}^{4} [\, L_0^{(p)}(x,y)u(\mathrm{P}_p)$$
$$+ L_1^{(p)}(x,y)u_x(\mathrm{P}_p)$$
$$+ L_2^{(p)}(x,y)u_y(\mathrm{P}_p)$$
$$+ L_3^{(p)}(x,y)u_{xy}(\mathrm{P}_p) \,]$$

$L_0^{(p)}(x,y)$　6 次の代数多項式
$u(P_p)$　節点 Pp での関数値
$u_x(P_p)$　節点 Pp での導関数値(偏微分).
$u_y(P_p)$,　・・・・
$u_{xy}(P_p)$　・・・・

■2階の差分方程式

$$a_n\boldsymbol{U}(y_{n+1})+b_n\boldsymbol{U}(y_n)+c_n\boldsymbol{U}(y_{n-1}) = 0$$

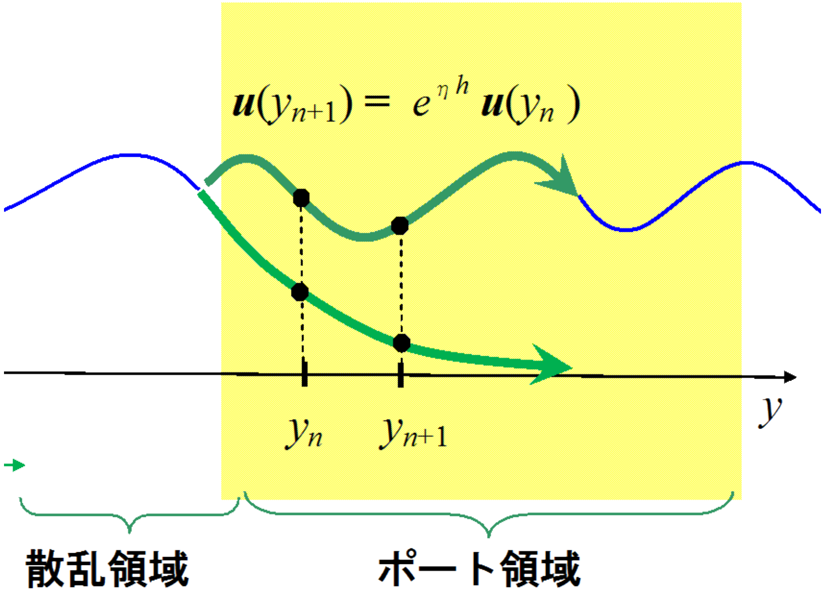


RTM整合ポート境界条件

■ 入出力ポートにおける伝達定数

$$c_{\rm port}\boldsymbol{u}(y_{n\text{-}1})+ b_{\rm port}\boldsymbol{u}(y_n)+ a_{\rm port}\boldsymbol{u}(y_{n+1}) = 0$$

$$\boldsymbol{u}(y_{n+1}) = e^{\eta h}\boldsymbol{u}(y_n)$$



■固有値問題への帰着

$$\begin{bmatrix} c_{\rm port} & b_{\rm port} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}(y_{n\text{-}1}) \\ \boldsymbol{u}(y_n) \end{bmatrix} = e^{\eta h}\begin{bmatrix} O & a_{\rm port} \\ \text{-}I & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}(y_{n\text{-}1}) \\ \boldsymbol{u}(y_n) \end{bmatrix}$$

$$\eta = \begin{cases} \pm ik & \text{(進行波)} \\ \pm\gamma & \text{(減衰/増大波)} \end{cases}$$

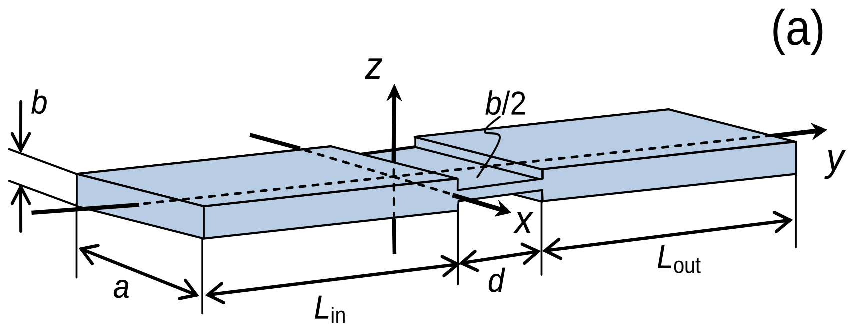
■伝達行列（Stepping matrices）

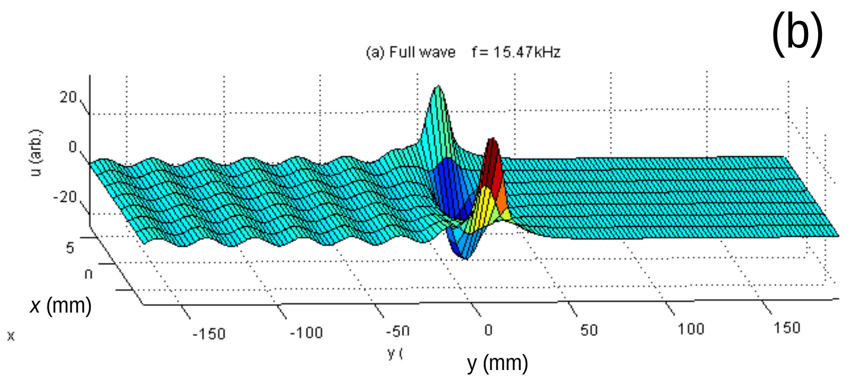
$$K_{\pm}^{\rm (dmp/grw)} = V\begin{bmatrix} e^{\pm ikh} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\pm\gamma h} \end{bmatrix}V^{-1}$$

■RTM 整合ポート境界条件

$$S_N = K_+^{\rm (dmp)} \qquad S_0 = K_-^{\rm (grw)}$$

弾性平板におけるFano効果　＝共鳴反射＝





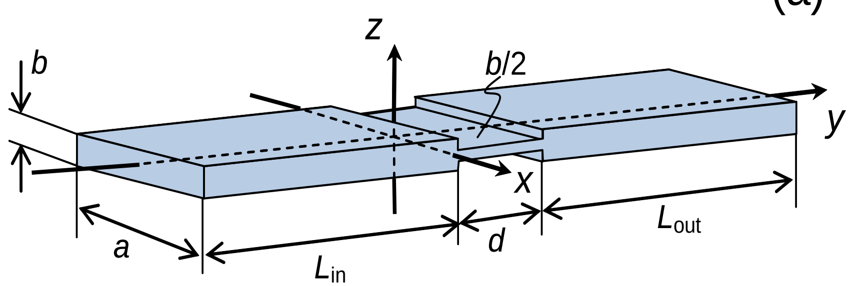
d = 20mm　　 *a* = 16mm　b = 1mm

Z_{in} = -80mm　 N_x = 15 (h_x = 1.067)

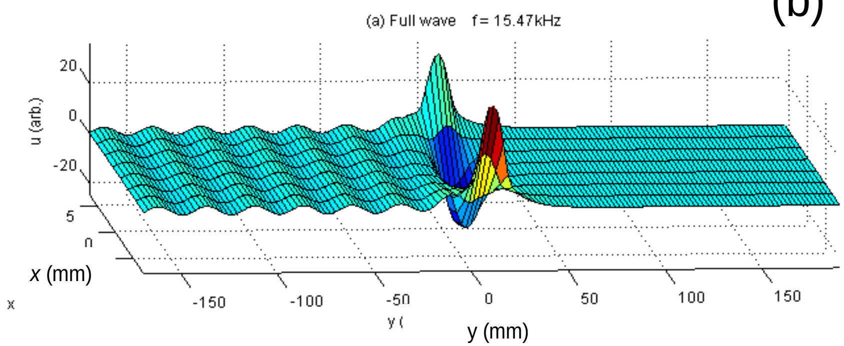
Z_{out} = 28mm　 N_y = 30 (h_y = 1.200)

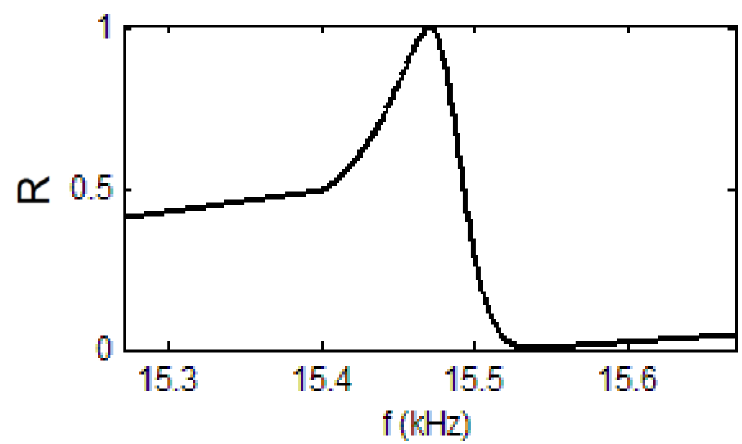
弾性平板におけるFano効果　＝共鳴反射＝

(a)



(b)

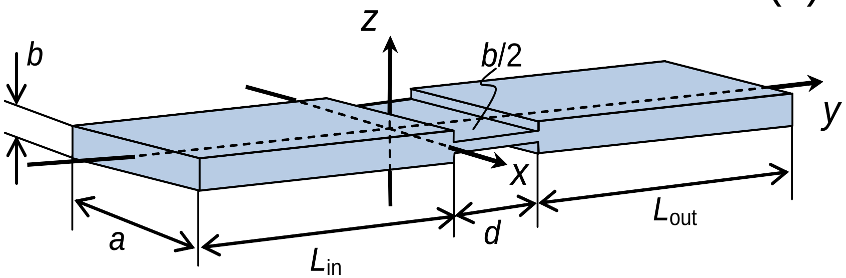


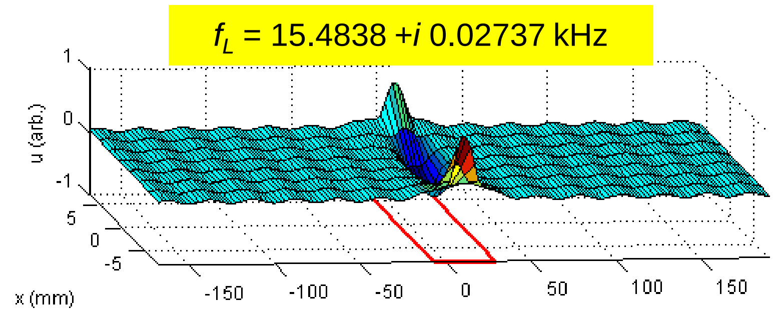


d = 20mm　　a = 16mm　b = 1mm
Z_{in} = -80mm　N_x = 15 (h_x = 1.067)
Z_{out} = 28mm　N_y = 30 (h_y = 1.200)

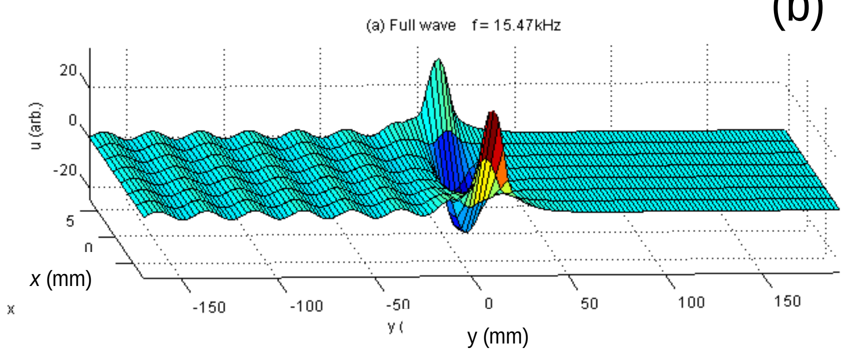
複素周波数をもつ擬似局在波

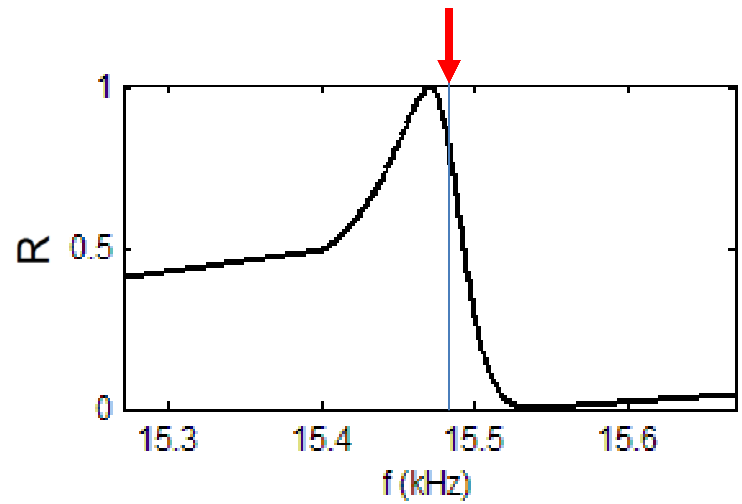
(a)





(b)





d = 20mm a = 16mm   b = 1mm

Z_{in} = -80mm N_x = 15 (h_x = 1.067)

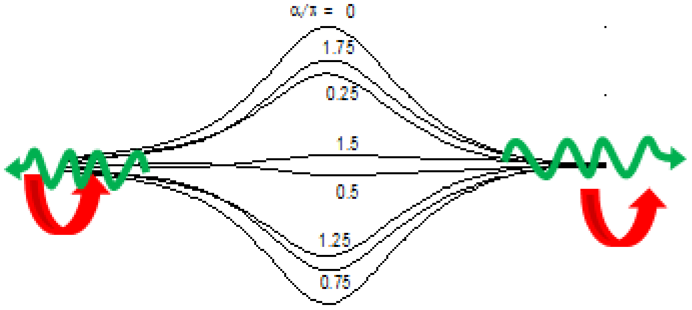
Z_{out} = 28mm N_y = 30 (h_y = 1.200)

局在波/擬似局在波の抽出

■RTM 整合ポート境界条件

$$\boldsymbol{u}(y_{N+1}) = K_+^{(\mathrm{dmp})}\boldsymbol{u}(y_N)$$

$$\boldsymbol{u}(y_{-1}) = \left(K_-^{(\mathrm{grw})}\right)^{-1}\boldsymbol{u}(y_0)$$



■大域的な連立次方程式 u(y_n)

$$c_0\boldsymbol{u}(y_{-1})+b_0\boldsymbol{u}(y_0)+a_0\boldsymbol{u}(y_1) = 0, \qquad (n=0)$$

$$c_n\boldsymbol{u}(y_{n+1})+b_n\boldsymbol{u}(y_n)+a_n\boldsymbol{u}(y_{n-1}) = 0, \qquad (n=1,2,\ldots,N-1)$$

$$c_N\boldsymbol{u}(y_{N-1})+b_N\boldsymbol{u}(y_N)+a_N\boldsymbol{u}(y_{N+1}) = 0. \qquad (n=N)$$

■仮固有値 ω_0^2 と固有値 ω_L^2 の逐次代入法による一致

$$\omega_L^2 b(x,y)\rho \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega_L^2)\, b(x,y)\rho + \omega_L^2 b(x,y)\rho$$

$$c_n \Rightarrow c_n^{(1)} + \omega_L^2 c_n^{(2)}, \quad b_n \Rightarrow b_n^{(1)} + \omega_L^2 b_n^{(2)}, \quad a_n \Rightarrow a_n^{(1)} + \omega_L^2 a_n^{(2)}.$$

単極 f_L (= $\omega_L/2\pi$)による共鳴曲線の近似モデル

*S*行列と位相シフト，および単極モデル

$$S(k) = \begin{bmatrix} r(f) & t'(f) \\ t(f) & r'(f) \end{bmatrix}$$

$$\det S(f) = e^{i2\delta(f)}$$

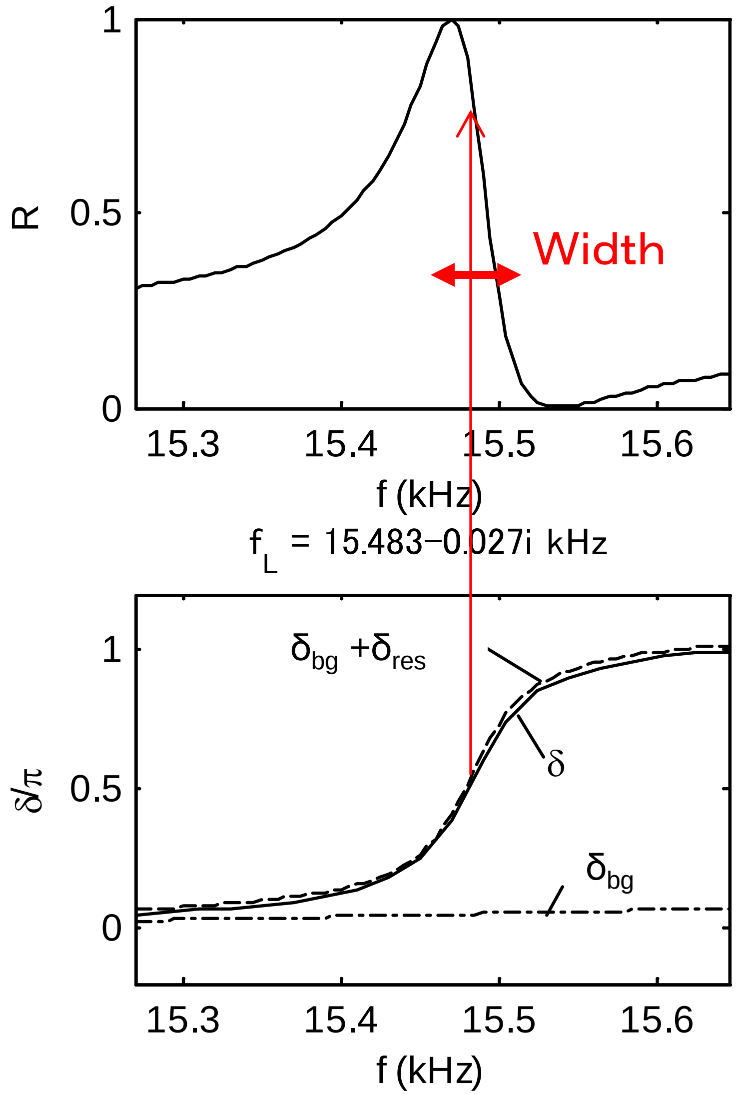
$$\approx e^{i2\delta_{bg}(f)} \frac{f - f_L^*}{f - f_L}$$

位相シフトの分離

$$\delta(f) \approx \delta_{bg}(f) + \delta_{res}(f)$$

$$\delta_{res}(f) = \frac{1}{2i} \log \frac{f - f_L^*}{f - f_L}$$

$$= \cot^{-1} \frac{f - \mathrm{Re}[f_L]}{\mathrm{Im}[f_L]}$$



まとめ

- RTMの弱形式離散化スキームの提案
  弱形式表現が可能なシステムへ適用範囲が拡大
- RTM整合ポート境界条件(RTM-consistent PBC)
  ポート境界で全モードを接続
  エネルギーを保存しつつ無反射
- 局在波/擬似局在波の抽出法
  複素周波数の単極モデル
  Fano効果の解析に有効
- 重調和方程式を拡張
  テンソル基底を用いた屈曲波の定式化と流束の定義
  ４階の微分方程式の共変的な表現

参考文献

加藤 初弘　加藤初儀
「非等質な弾性平板におけるテンソル基底を用いた新しい定式化」,
応用数理学会誌，Vol.22, No.4,pp.253-267，(25 Dec. 2012).

H.atsuhiro Kato, Hatsuyoshi Kato
“New formulation for the recursive transfer method using the weak form thery framework and its application to microwave scattering”
IEICE Transactions: Fundamentals，Vol.E96-A, No.12, pp. 2698-2708，(Dec. 2013).

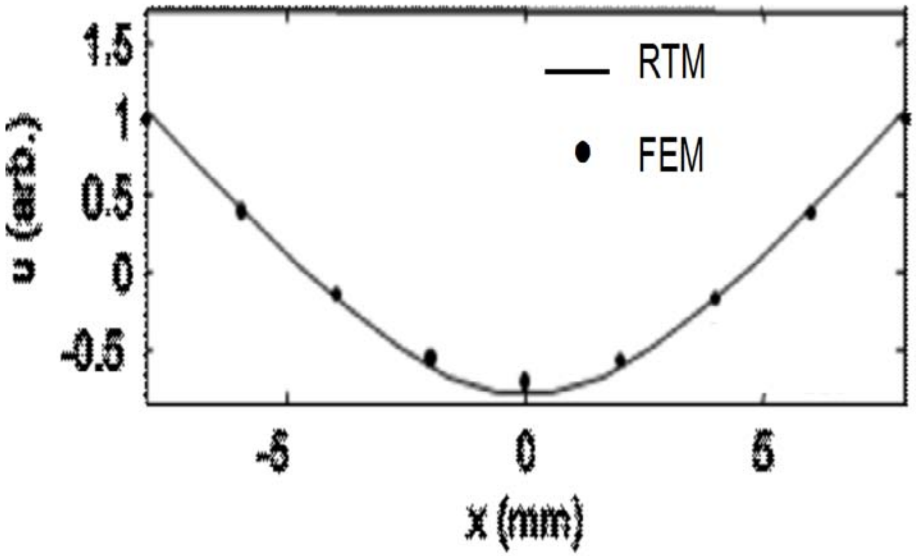
Hatsuhiro Kato, Hatsuyoshi Kato
“Application of the recursive transfer method to flexural waves I: Novel discretization　scheme using weak form theory framework and wave guide modes on inhomogeneous elastic plates”,
IEICE　Transaction A: Fundamentals　vol.E97-A, no.5,p p. pp.1075-1085, (May. 2014).

Hatsuhiro Kato, Hatsuyoshi Kato and Takaaki Ishii,
“Application of the recursive transfer method to flexural waves II: Reflection enhancement caused by resonant scattering in acoustic waveguide”,
IEICE　Transactions: Fundamentals, vol. E98-A, no. 1, pp. 354-361，(1 Jan. 2015).

Hatsuhiro Kato, Hatsuyoshi Kato
“Weak-form discretization, waveguide boundary conditions　and extraction of quasi-localized waves causing Fano resonance”
IEICE　Transactions: Fundamentals, vol. E97-A　no.8　pp. 1720-1727（1 August 2014）.

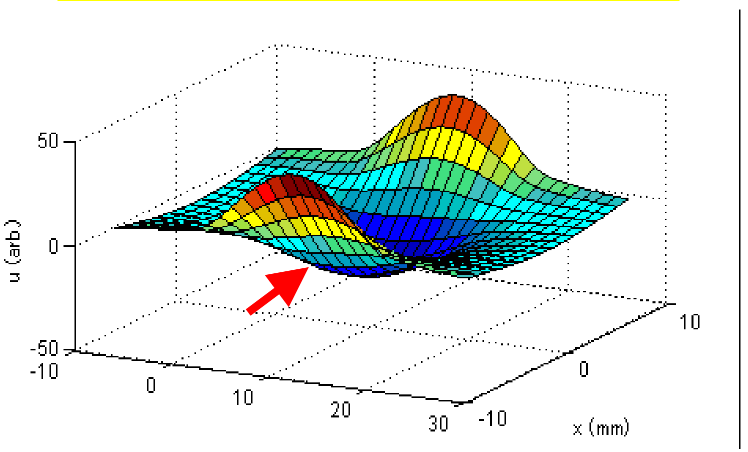
加藤初弘，加藤初儀,
「逐次伝達法のための弱形式離散化スキームとその離散化誤差」，
日本応用数理学会 論文誌，vol.25，no.1, pp. 31-46，(March 2015).

An RTMとFEMの比較

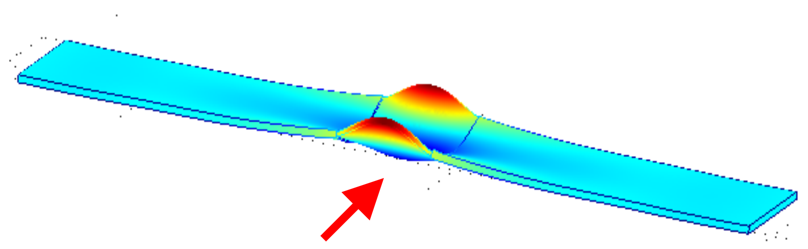


RTM with RTM-consistent PBC

f_L = 15.4838 +i 0.02737 kHz

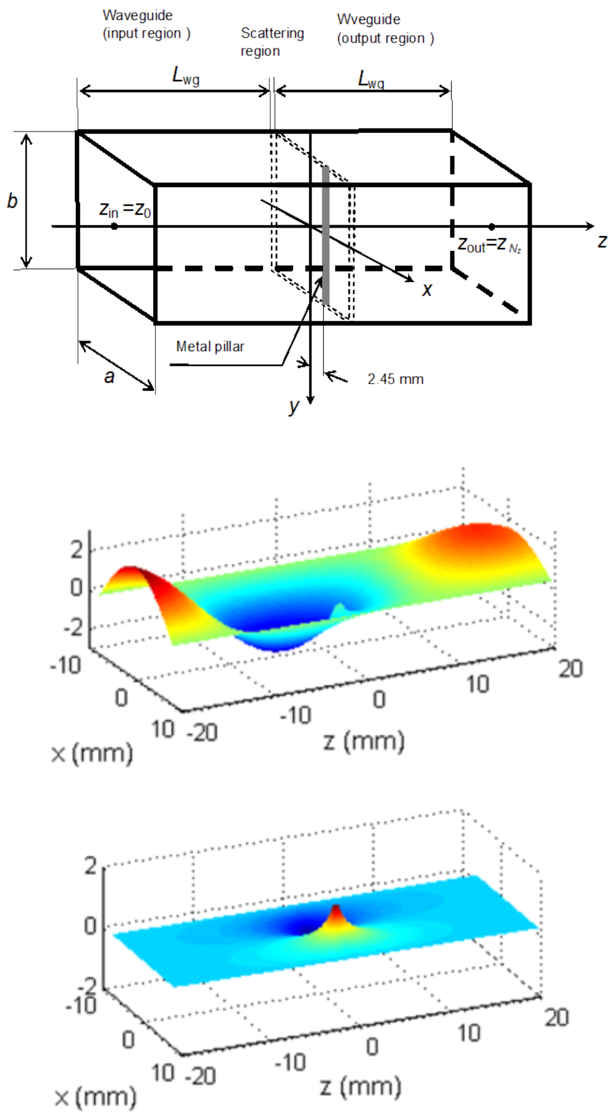


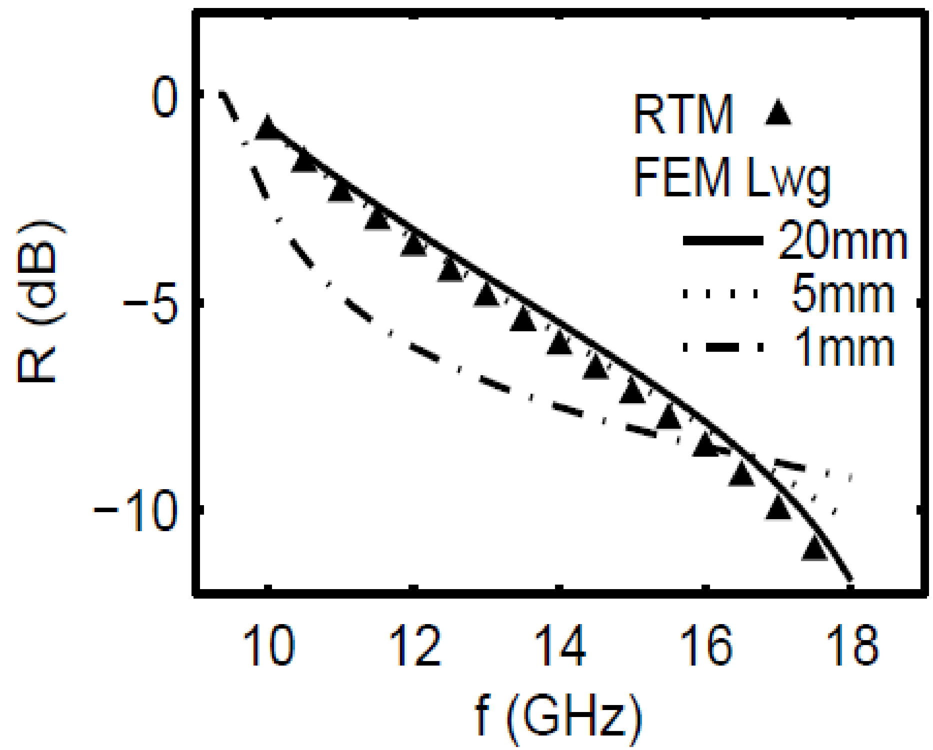
FEM with free BC



3%の不一致

解析境界に達する局在波の裾による影響





Neumann型境界条件における高階微分の欠落

■単一モード状態

$$u = a_0 X_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ik_0 a_0 X_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ik_0 u$$

■複数モード状態

$$u = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ik_0 a_0 X_0 + ik_1 a_1 X_1 + ik_2 a_2 X_2 ,$$

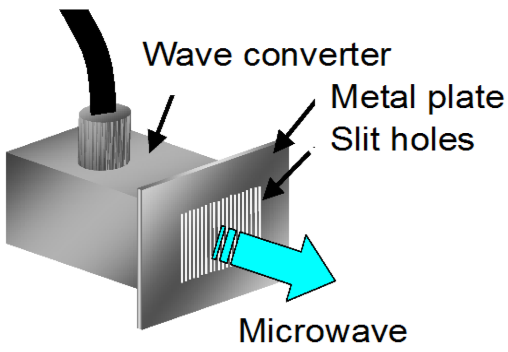
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (ik_0)^2 a_0 X_0 + (ik_1)^2 a_1 X_1 + (ik_2)^2 a_2 X_2,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = (ik_0)^3 a_0 X_0 + (ik_1)^3 a_1 X_1 + (ik_2)^3 a_2 X_2, .$$

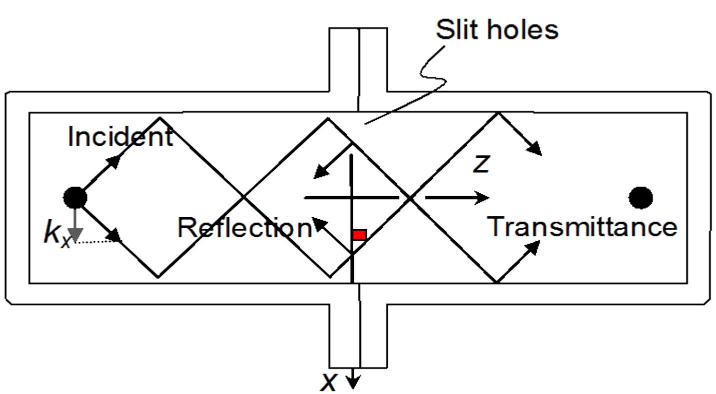
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ (ik_0)^2 X_0 & (ik_1)^2 X_1 & (ik_2)^2 X_2 \\ (ik_0)^3 X_0 & (ik_1)^3 X_1 & (ik_2)^3 X_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \end{bmatrix} .$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = [\ ik_0 X_0 \quad ik_1 X_1 \quad ik_2 X_2\ ] \begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ (ik_0)^2 X_0 & (ik_1)^2 X_1 & (ik_2)^2 X_2 \\ (ik_0)^3 X_0 & (ik_1)^3 X_1 & (ik_2)^3 X_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \end{bmatrix} .$$

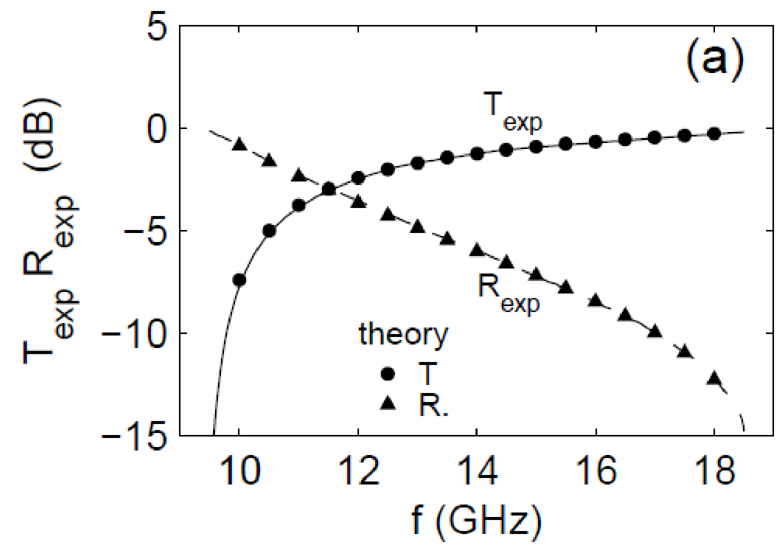
RTM confirmed by experiment

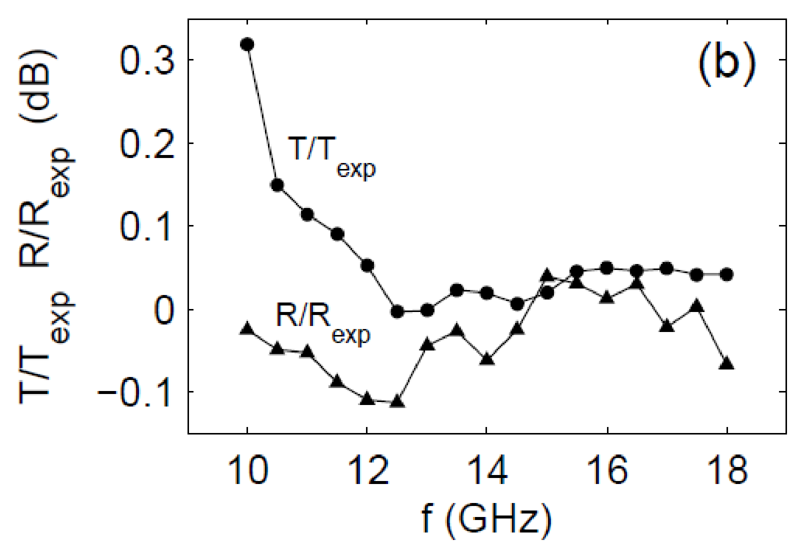


(a)



(b)





誤差の離散化幅h-依存

１次元シュエディンガー方程式

$$u''(x) + [\,\varepsilon - \mathrm{sech}^2(x)]\, u(x) = 0$$

ε　入射エネルギー

$\mathrm{sech}^2(x)$　散乱ポテンシャル

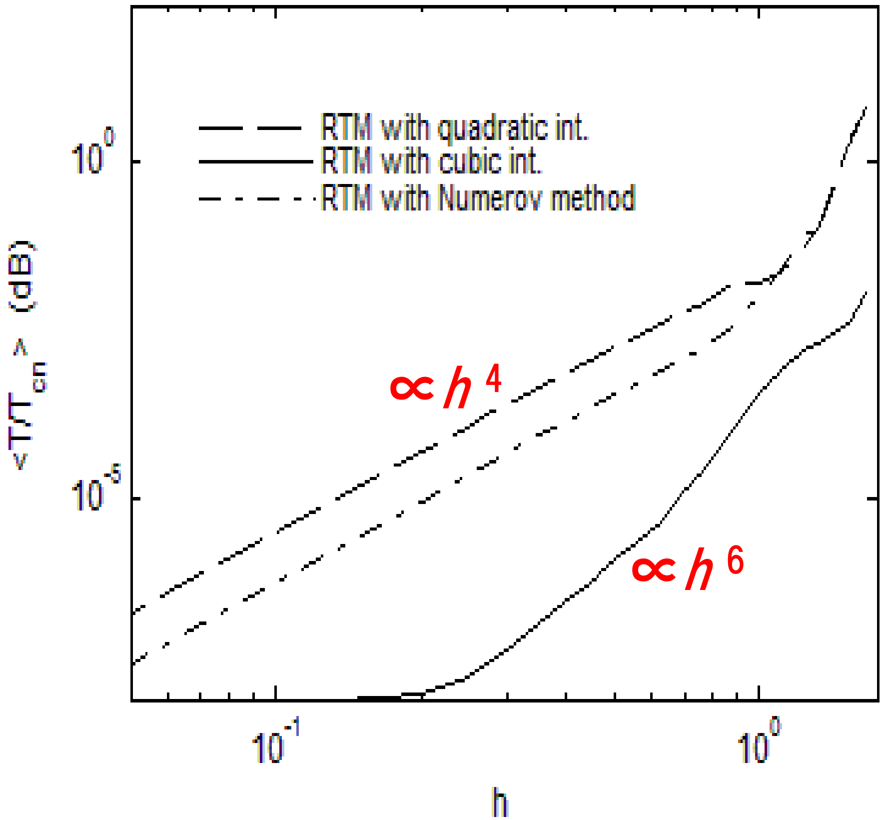
連続システムでの透過率

$$T_{cn} = \frac{\sinh^2(\pi\sqrt{\varepsilon})}{\sinh^2(\pi\sqrt{\varepsilon})+\cosh^2(\pi\sqrt{3}/2)}$$

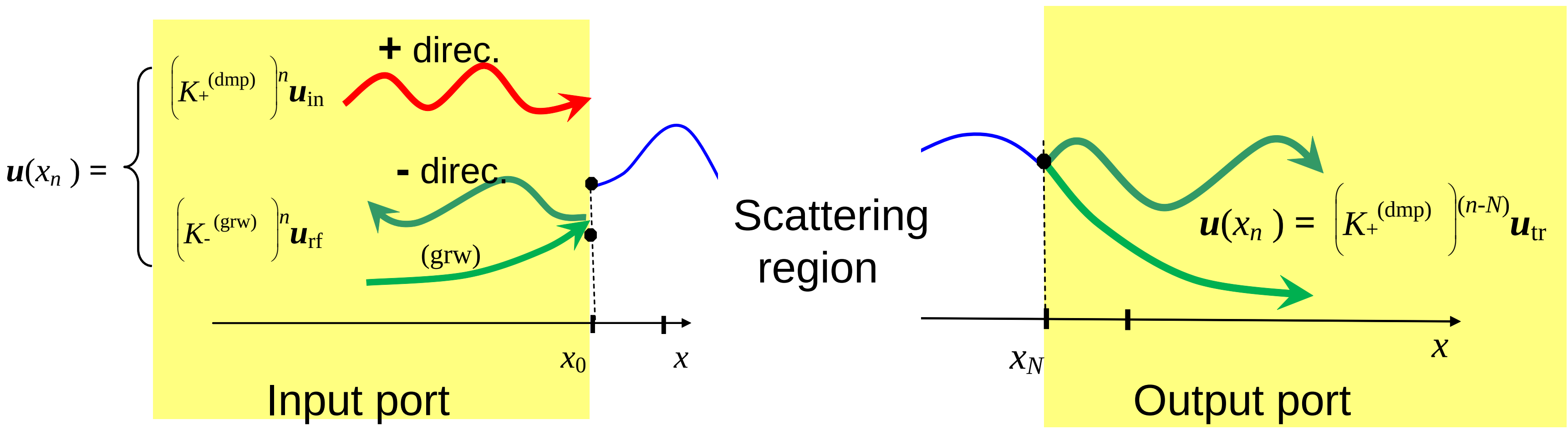
$<T/T_{cn}>$　相対誤差の総乗平均

$(0.1 < \varepsilon < 2.8)$

h　T_{cn} =空間の離散化幅



Discretized wave expression in port regions



■Waves in Ports

$$u(x_n) = \begin{cases} K_+^{(dmp)\ n} u_{in} + K_-^{(grw)\ n} u_{rf} & \text{input port} \\ K_+^{(dmp)\ (n-N)} u_{tr} & \text{output port} \end{cases}$$

■Expressions for wave connections

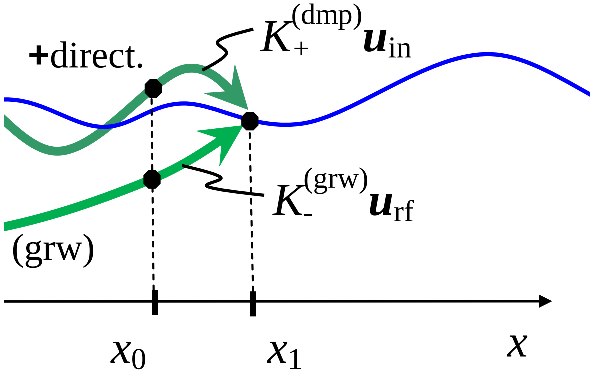
$$u(x_1) = K_+^{(dmp)} u_{in} + K_-^{(grw)} u_{rf} \quad \text{at} \quad x = x_1$$

$$u(x_{n+1}) = K_+^{(dmp)} u(x_n) \quad \text{at} \quad x_n > x_N$$

Reflection and transmission coefficients by RTM

■ **Connection at** x_1

$$K_+^{(\mathrm{dmp})}\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{in}} + K_-^{(\mathrm{grw})}\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{rf}} = S_0\,(\boldsymbol{u}_{\mathrm{in}} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{rf}})$$



Reflection field

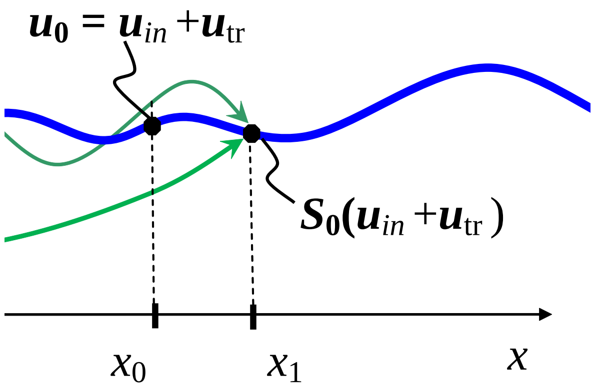
$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{rf}} = -(S_0 - K_-^{(\mathrm{grw})})^{-1}(S_0 - K_+^{(\mathrm{dmp})})\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{in}}$$

$r = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{rf}}$ Reflection coefficient

Transmission field

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{tr}} = S_{N\text{-}1}\cdots S_2\,S_1 S_0\,(\boldsymbol{u}_{\mathrm{in}} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{rf}})$$

$t = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{tr}}$ Transmission coefficient



$\mathbf{e}_1 = [1\ 0]^{\mathrm{T}}$ Unit vecor

RTM整合ポート境界条件　～並進対称な入出力ポート～

$$a_{\mathrm{port}}\boldsymbol{U}(y_{n+1}) + b_{\mathrm{port}}\boldsymbol{U}(y_n) + a_{\mathrm{port}}\boldsymbol{U}(y_{n-1}) = 0$$

$$\boldsymbol{U}(y_{n+1}) = K\boldsymbol{U}(y_n),\ \boldsymbol{U}(y_{n-1}) = K^{-1}\boldsymbol{U}(y_n)$$

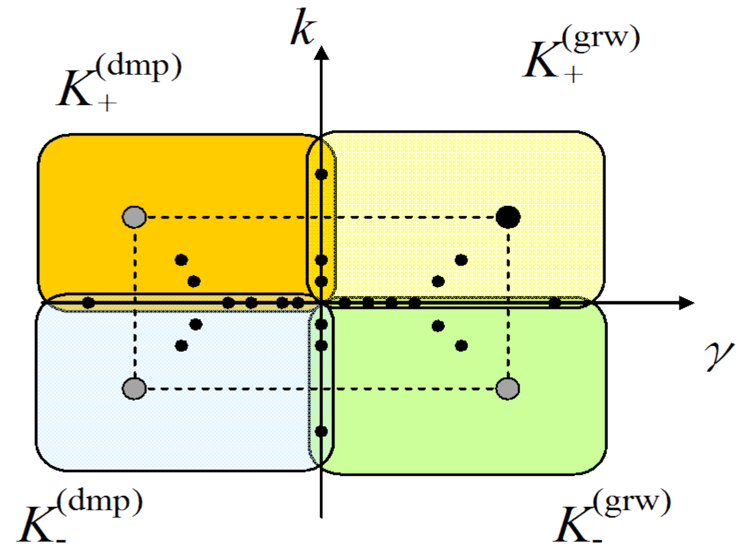
$$K = e^{Hh_y}$$

$$\Rightarrow\ H = \frac{1}{h_y}\cosh^{-1}\left(\frac{-1}{2}a_{\mathrm{port}}^{-1}b_{\mathrm{port}}\right)$$

$$K = T^{-1}\begin{bmatrix} e^{\eta_0 h_y} & & & & & \\ & e^{\eta_1 h_y} & & & & \\ & & e^{\eta_2 h_y} & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & e^{\eta_{N_x} h_y} \end{bmatrix} T$$

時間・空間反転対称性

$$\eta_p = \pm\gamma_p \pm ik_p \qquad (p=0,1,2,\ldots,N_x)$$



境界の外部に接続

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{tr}}(y_{Ny+1}) = K_{+}^{(\mathrm{dmp})}\boldsymbol{U}_{\mathrm{tr}}(y_{Ny})$$

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{in}}(y_0) = K_{+}^{(\mathrm{grw})}\boldsymbol{U}_{\mathrm{in}}(y_{-1})$$

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{rf}}(y_0) = K_{-}^{(\mathrm{grw})}\boldsymbol{U}_{\mathrm{rf}}(y_{-1})$$

Extraction of quasi-localized wave (2/2)

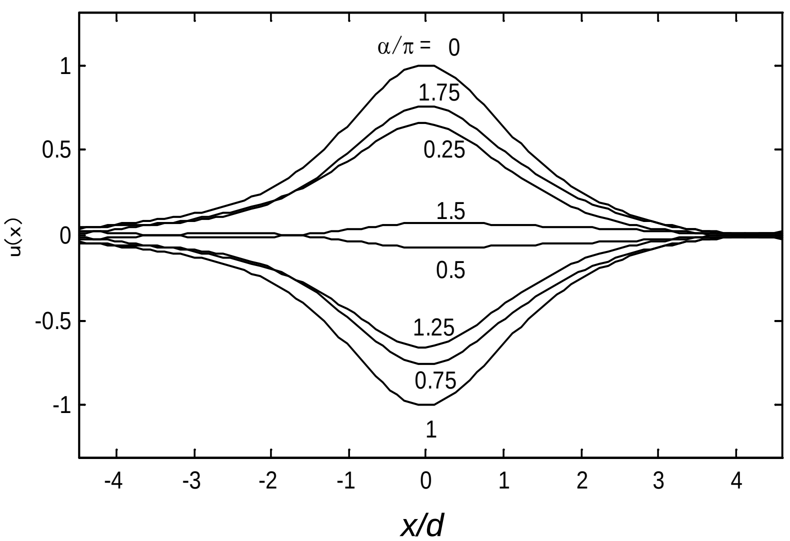
■ Actual $k_L{}^2$ as eigenvalue and wave shape as eigenvector

$$\begin{bmatrix} c_0^{(1)}\left(K_+^{(grw)}\right)^{-1}+b_0^{(1)} & a_0^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1^{(1)} & b_1^{(1)} & a_1^{(1)} & & & \\ 0 & c_2^{(1)} & b_2^{(1)} & a_2^{(1)} & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & c_1^{(1)} & b_N^{(1)}+a_N^{(1)} K_+^{(dmp)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_0) \\ u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{bmatrix} = k_L{}^2 \begin{bmatrix} c_0^{(2)}\left(K_+^{(grw)}\right)^{-1}+b_0^{(2)} & a_0^{(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1^{(2)} & b_1^{(2)} & a_1^{(2)} & & & \\ 0 & c_2^{(2)} & b_2^{(2)} & a_2^{(2)} & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & c_N^{(2)} & b_N^{(2)}+a_N^{(2)} K_+^{(dmp)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_0) \\ u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{bmatrix}$$

$k_L d$ = 0.99766 +i 0.00062

Consistency by iterative use

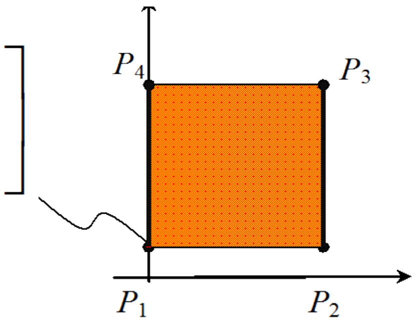
$$k_0 \;\longrightarrow\; K_+^{(dmp)},\; K_-^{(grw)} \longrightarrow\; k_L$$



Eleven times iterations

$$\left| \frac{k_L{}^{(p+1)} - k_L{}^{(p)}}{k_L{}^{(p)}} \right| < 10^{-5}$$

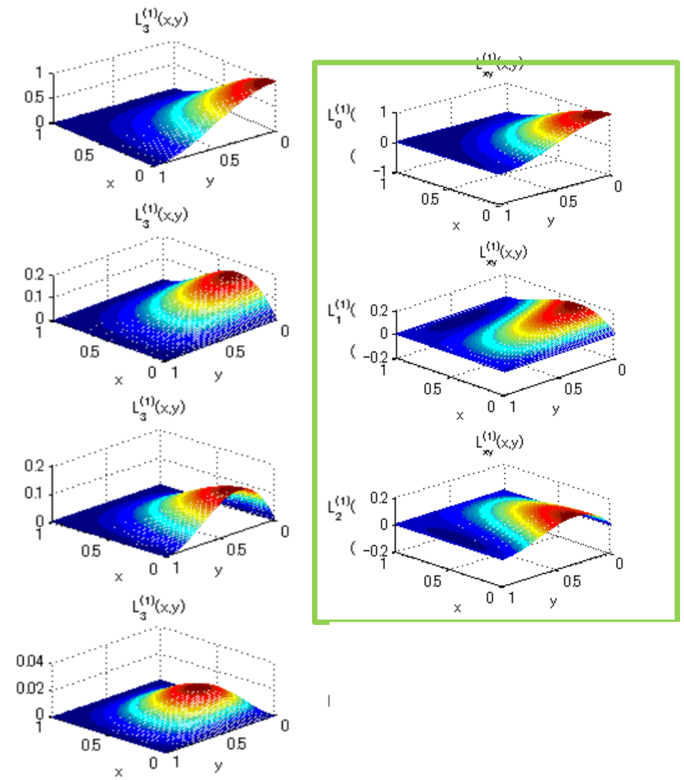
要素内補間による差分方程式の導出（その1b）



$$\underline{u}_{ln} = \begin{bmatrix} u(x_l, y_n) \\ u_x(x_l, y_n) \\ u_y(x_l, y_n) \\ u_{xy}(x_l, y_n) \end{bmatrix}$$

■補間関数

$$u(x,y) = \sum_{p=1}^{4} [\, L_0^{(p)}(x,y)u(\mathrm{P}_p) + L_1^{(p)}(x,y)u_x(\mathrm{P}_p) + L_2^{(p)}(x,y)u_y(\mathrm{P}_p) + L_3^{(p)}(x,y)u_{xy}(\mathrm{P}_p) \,]$$



$L_0^{(p)}(x,y)$　6 次の代数多項式

$u(P_p)$　節点 Pp での関数値

$u_x(P_p)$　節点 Pp での導関数値(偏微分).

$u_y(P_p)$,　・・・・

$u_{xy}(P_p)$　・・・・

流束保存条件

$$\int_S \nabla \cdot \boldsymbol{J}\, \mathrm{d}S = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \sum_{r=0}^{2} D_{\mathbf{r}} [w(\Delta_{\mathbf{r}}^{2} u) - (\Delta_{\mathbf{r}} w)(\Delta_{\mathbf{r}} u)]$$