測定データの処理方法　－ 確率誤差と有効数字 —

2011年度版　山梨大・工・ＭＳ-D　加藤

1　　測定値と確率誤差

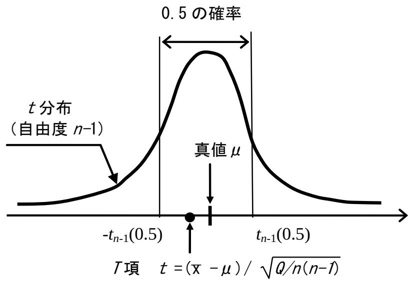
測定という「試行」を「無作為抽出」とみなすと，測定は一種の標本抽出である．「大数の法則」は，知りたい真値が母集団平均μであることを述べている．測定値 x_i (i= 1 ,2,･･･,n)から求めた平均値$\bar{x}$を $t = (\bar{x}-\mu)/\sqrt{Q/n(n-1)}$ と標準化した量をt 項と呼ぶ．この時，t 項は自由度n-1の t-分布に従うことが知られている．ここに，Qは平方和である．t項の定義式に現れる真値μ以外の量は測定により決定できる．従って，標準化された量が出現する範囲を，確率を0. 5の範囲に限ることで，真値μが存在する範囲を推定することができる．即ち，t分布の上方および下方限界を$\pm t_{n-1}(0.5)$とすると，

$$\bar{x} - t_{n-1}(0.5)\sqrt{\frac{Q}{n(n-1)}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1}(0.5)\sqrt{\frac{Q}{n(n-1)}} \qquad (1)$$

である．誤差論では，平均値 $\bar{x}$ を最確値とよび

$$\varepsilon = t_{n-1}(0.5)\sqrt{\frac{Q}{n(n-1)}} \qquad (2)$$

を確率誤差呼ぶ．係数 $t_{n-1}(0.5)$は危険率を0.5とした係数であり，その値は次の t 分布表に示すものである．



t 分布曲線と各統計量

自由度 ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	∞
$t_\nu(0.5)$	1	0.816	0.765	0.741	0.727	0.718	0.711	0.706	0.703	0.700	0.679	0.677	0.675

実際の計算では，平方和Qを公式

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \qquad (3)$$

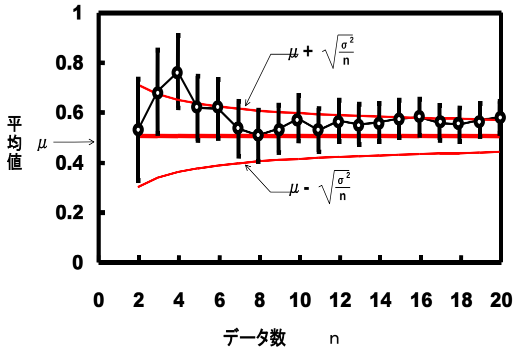
により求めると計算効率がよい．

2　平均値のデータ数依存

測定データの数を無限個にすると，平均値は真値（母平均）に達するはずである．しかし，実際の測定では有限回数の測定しかできない. では, 測定回数を何回にするのが妥当なのだろうか？この目安を与えるのが右図である. 母平均μ=1/2, 母分散σ^2 = 1/12の一様分布に従うとして，母平均μの区間推定値

$$\mu = \bar{x} \pm t_{n-1}(0.5)\sqrt{\frac{Q}{n(n-1)}}$$

をプロットした. 確かにｎが大きくなると誤差は小さくなるがｎ>10ではその効果は小さい.



[問]　データ数n=2550のとき，平均値のバラツキは何%か.

3　有効数字と誤差を伴った測定値の表現

ある重さmの最確値が203.4672gで確率誤差δmが0.274gであったとする．この時，mを次の様に表現する．

単位を忘れないこと

$$m = (2.03\underbrace{5 \pm 0.00}_{\text{最後の桁を一致させる}}3) \times 10^{2} \quad g$$

先頭は０でない数字をに記す

mの有効数字が４桁であり誤差が3/1000であることが直ちに分かる．この表現を標準形という．

4　計算例

ある２地点間の距離を測定して次表の様な測定値を得たとする．この距離の最確値と確率誤差を，計算表を用いて求める．計算を容易にするため，仮平均bとスケール因子aを用いて測定値を$y_i=(x_i-b)/a$ に変換する．y_iに関する平均値と$\bar{y}$ 平方和Q_yは表に示した総和の値①と②を用いて次のように求めることができる．

仮平均 b=7.470　　　ｽｹｰﾙ因子 $a=10^3$

番号 i	測定値 (m) x_i	$y_i = (x_i-b)/a$	y_i^2
1	7.474×10^3	0.004	16×10^{-6}
2	7.470×10^3	0.000	0×10^{-6}
3	7.468×10^3	-0.002	4×10^{-6}
総和	―	0.002 ①	20×10^{-6} ②

$$\bar{y} = \frac{1}{3}\,0.002 = 0.000667 \text{ (m)}$$

$$Q_y = 20\times10^{-6} - \frac{1}{3}\,0.002^2 = 18.7\times10^{-6} \text{ (m}^2\text{)}$$

x_iとy_iは1次変換で結び付けられるので，x_iに関する平均$\bar{x}$と平方和Q_x は次のように計算できる．

$$\bar{x} = a\bar{y} + b = 7.4706667\times10^3 \text{ (m)}$$

$$Q_x = a^2 Q_y = 0.0000187\times10^6 \text{ (m}^2\text{)}$$

従って，確率誤差εは,$t_{3-1}(0.5) = 0.816$を用いると

$$\varepsilon = 0.816\{ \sqrt{0.0000187\times10^6/3(3-1)} = 0.00144\times10^3 \text{ (m)}$$

となる．以上の結果をｘの標準形で表現すると次のようになる．

$$x = (7.4707 \pm 0.0014)\times10^3 \quad \text{（m）}$$

問題１） 誤差の有効数字を１桁とすると, 次の標準形の表現は正しくない. 正しい形に修正せよ.

$(3.14159\pm0.003)\times10^{3}$　mm　　　　$(6.791\pm0.972)\times10^2$　s

$(6.79\pm2\times10^{-2})\times10^{3}$　mm　　　　125674 ± 20　g

$(6.791\pm0)\times10^2$　s　　　　$(76.419\pm0.006)\times10^2$　s

問題２）　「**4.計算例**」に示した例で　a=1,　b=0として計算を行え．このとき，妙なことが生じた場合は，その原因について考察せよ．

問題３）　ある部材の寸法を測定して次の４つの値を得たとする（単位はcm）．これらのデータから最確値と確率誤差をもとめて標準形で示せ．計算は必ず例に示した計算表を用いて行うこと．

2.452×10^{-6}　　　2.446×10^{-6}　　　2.450×10^{-6}　　　2.456×10^{-6}