

微分積分学Ⅱ 定期試験問題(2009年2月)

氏名 _____

学籍番号 _____

1. 2変数関数 $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy$ ($x, y \neq 0$) の極値を求めるため、空欄に適当な式または語句を入れよ。(15点)

$f(x, y)$ の1階偏導関数を求めると、

$f_x(x, y) =$ (_____), $f_y(x, y) =$ (_____) である。

ここで、極値を取る可能性のある点は、次の **整式** からなる連立方程式を満たす。

(_____) = 0, (_____) = 0.

ゆえに、極値を取る可能性のある候補点は、 $(x, y) =$ (_____ , _____) である。

次に2階偏導関数を $A = f_{xx}(x, y)$, $B = f_{xy}(x, y)$, $C = f_{yy}(x, y)$ とするとき、

A, B, C を使って $\Delta(x, y) =$ (_____) とおき、極値の判定条件を調べると、

(_____) かつ (_____) であるから、

候補点は、(_____) 値を与え、その値は (_____) となる。

2. 条件 $x^2 + y^2 = 1$ を満たす点での、2変数関数 $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$ の極値を求めるため、次の問いに答えよ。(15点)

(1) ラグランジュの乗数法に従って、極値を与える候補点を求める方程式を、定数 λ を用いて簡約化した式で表せ。

(2) λ を求めよ。

(3) 極値を取る候補点および $f(x, y)$ の最大値および最小値を求めよ。

3. 2重積分に関して次の問に答えよ。(20点)

(1) 2重積分 $\iint_D f(x,y)dx dy$ の値は、曲面 $z = f(x,y)$ と xy -平面の間で積分領域 D 上にある部分の立体の符号付き体積として定義されている。この定義に基づいて領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ での2重積分 $\iint_D x dx dy$ に対応する立体を図示して、この積分の値を求めよ。

(2) 領域 $D = \{(x,y) \mid y \geq x^2, x \geq y^2\}$ での2重積分 $\iint_D f(x,y)dx dy$ を、2通りの累次積分で表せ。

(3) (i) $\int_0^2 \left\{ \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y) dx \right\} dy = \iint_D f(x,y) dx dy$ とするとき、積分領域 D を xy -平面上に図示せよ。

(ii) 上記の累次積分の積分順序を変更せよ。

(4) 累次積分 $\int_0^1 \left\{ \int_y^1 e^{x^2} dx \right\} dy$ の値を求めよ。

4. 次の2重積分の変数変換に関して、空欄に適切な式または値を入れよ。(20点)

(1) 変換 $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ に対するヤコビアンは ()

である。この式を J とおき、2重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ を u, v に変数変換したときの

D に対応する積分領域を D' とすると、 $\iint_D f(x, y) dx dy$ は、 u, v を用いて

() と表される。

(2) 領域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$ での2重積分 $\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$ を

極座標 (r, θ) に変換するとき、領域 D に対応する変数 r, θ の積分領域 D' を連立不等式を用いて表すと () となり、極座標に変換さ

れた2重積分は () と表される。これを累次積分で表すと、

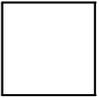
() と表され、この値は () となる。

5. 次の問いにおける図形の体積あるいは曲面積を求めよ。(30点)

(1) 放物柱面 $z = 1 - x^2$ と平面 $y = 0, y = 2, z = 0$ とで囲まれた立体の体積。

(2) 放物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ と平面 $z = 0$ で囲まれた立体の体積。

(3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ の $z \geq 0$ の部分の曲面積。



(4) 放物面 $z = x^2 + y^2$ の円柱面 $x^2 + y^2 = 4$ の内部にある部分の曲面積。

