微分積分学Ⅱ　定期試験問題 (２００９年２月)

氏名 ______________________________

学籍番号 ______________________________

1.　２変数関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-xy\ (x,y\neq 0)$ の極値を求めるため、空欄に適当な式または語句を入れよ。(１５点)

　$f(x,y)$ の１階偏導関数を求めると、
$f_x(x,y)=$(　　　　　　　　)、 $f_y(x,y)=$(　　　　　　　　) である。
ここで、極値を取る可能性のある点は、次の **整式** からなる連立方程式を満たす。
(　　　　　　　　) =0、(　　　　　　　　) =0.
ゆえに、極値を取る可能性のある候補点は、$(x,y)=$(　　,　　) である。
　次に２階偏導関数を $A=f_{xx}(x,y),B=f_{xy}(x,y),C=f_{yy}(x,y)$ とするとき、
A,B,C を使って $\Delta(x,y)=$(　　　　　　　　) とおき、極値の判定条件を調べると、
(　　　　　　　　) かつ (　　　　　　　　) であるから、
候補点は、(　　　　) 値を与え、その値は (　　　　　　　　) となる。

2.　条件 $x^2+y^2=1$ を満たす点での、２変数関数 $f(x,y)=x^2+4xy+4y^2$ の極値を求めるため、次の問いに答えよ。(１５点)

(1) ラグランジェの乗数法に従って、極値を与える候補点を求める方程式を、定数 λ を用いて簡約化した式で表せ。

(2) λ を 求めよ。

(3) 極値を取る候補点および $f(x,y)$ の最大値および最小値を求めよ。

3.　２重積分に関して次の問に答えよ。（２０点）

(1)　２重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ の値は、曲面 $z=f(x,y)$ と xy-平面の間で積分領域Ｄ上にある部分の立体の符号付き体積として定義されている。この定義に基づいて領域 $D=\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ での２重積分 $\iint_D xdxdy$ に対応する立体を図示して、この積分の値を求めよ。

(2)　領域 $D=\{(x,y) \mid y \geqq x^2,\ x \geqq y^2\}$ での２重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ を、２通りの累次積分で表せ。

(3)　(i)　$\int_0^2 \left\{ \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx \right\} dy = \iint_D f(x,y)dxdy$ とするとき、積分領域Ｄを xy-平面上に図示せよ。

(ii)　上記の累次積分の積分順序を変更せよ。

(4)　累次積分 $\int_0^1 \left\{ \int_y^1 e^{x^2} dx \right\} dy$ の値を求めよ。

4. 次の２重積分の変数変換に関して、空欄に適当な式または値を入れよ。（ ２０点）

(1) 変換 $x = g(u,v),\ y = h(u,v)$ に対するヤコビアンの式は (　　　　　　　　　　)

である。この式を J とおき、２重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を u,v に変数変換したときの

Dに対応する積分領域を D' とすると、$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ は、u,v を用いて

$\left(\displaystyle\iint \qquad\qquad\qquad\qquad \right)$ と表される。

(2) 領域 $D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2,\ y \geqq 0\}$ での２重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$ を

極座標 (r,θ) に変換するとき、領域 D に対応する変数 r,θ の積分領域 D' を連立不等式を用いて表すと (　　　　　　　　　,　　　　　　　　　　) となり、極座標に変換された２重積分は $\left(\displaystyle\iint \qquad\qquad\qquad \right)$ と表される。これを累次積分で表すと、

$\left(\displaystyle\int \ \int \qquad\qquad\qquad\qquad \right)$ と表され、この値は (　　　　　　　　　　) となる。

5. 次の問いにおける図形の体積あるいは曲面積を求めよ。（ ３０点）

(1) 放物柱面 $z = 1 - x^2$ と平面 $y = 0, y = 2, z = 0$ とで囲まれた立体の体積。

(2) 放物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ と平面 $z = 0$ で囲まれた立体の体積。

(3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ の $z \geqq 0$ の部分の曲面積。

(4) 放物面 $z = x^2 + y^2$ の円柱面 $x^2 + y^2 = 4$ の内部にある部分の曲面積。