

微分積分学 I 定期試験問題 (2009年8月)

氏名 _____

学籍番号 _____



以下の問題中、積分定数を書くことを省略している。答案中でも積分定数を省いても良い。



1. 閉区間 $[0,1]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、定積分の公式として、

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$$

が成立する。不定積分を用いず、この公式を用いることにより、定積分 $\int_0^1 x^2 dx$ を求めよ。

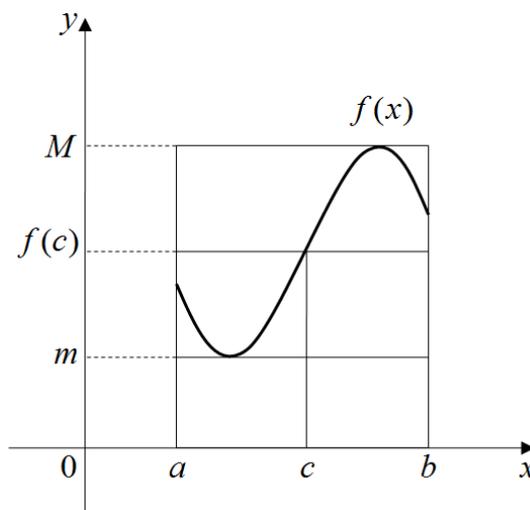
(ヒント：公式 $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ に注意せよ) (10点)



2. 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続ならば、

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \quad a < c < b$$

を満たす c が存在する(積分の平均値の定理)。この定理の意味を下図にもとづき説明せよ。ここで、区間 $[a,b]$ における $f(x)$ の最大値を M 、最小値を m とし、 $f(x)$ のグラフを太線で表す。(10点)



3. (1) 部分積分法を用いて、不定積分 $\int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$ を求めよ。(ヒント：途中、

$$\frac{1}{(x+1)x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad \text{に注意せよ。)} \quad (8 \text{ 点})$$

(2) 上の結果を用い、 $\log 1 = 0$ 、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$ に注意して、半开区間 $(0, 1]$ での広義積分

$$\int_0^1 \frac{\log x}{(1+x)^2} dx \quad \text{すなわち} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\log x}{(1+x)^2} dx \quad \text{を求めよ。} \quad (3 \text{ 点})$$

4. (1) a は 0 でない定数とする。 $x = a \tan t$ (すなわち $t = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$) とおき、置換積

分法を用いて、公式 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ を導け。(5 点)

(2) (1) で導いた公式を参考にして、不定積分 $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2} dx$ を求めよ。(10 点)

5. 不定積分の公式として,

$$\int e^x dx = \boxed{}, \quad \int \sin x dx = \boxed{}, \quad \int \cos x dx = \boxed{},$$

である. この3箇所の空欄を埋めよ.

また, 部分積分法を用いて, $I = \int e^x \sin x dx$ および $J = \int e^x \cos x dx$ を求めよ. (12点)

6. (1) $f(x)$ が微分可能のとき, 部分積分の公式より

$$\int f(x) dx = \boxed{} - \int x f'(x) dx$$

である. この空欄を x と $f(x)$ を用いた式で埋めよ. (5点)

(2) (1)を参考にして, 不定積分 $\int \log x dx$ を求めよ. (10点)

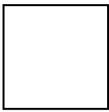
(3) さらに(1), (2)を参考にして, 不定積分 $\int (\log x)^2 dx$ を求めよ. (5点)

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ および $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ を求めよ. (12点)



8. $a > 0$, $b > 0$ とし, 楕円 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の上半分 (y 座標が負でない部分) D を考え, D と x 軸とで囲まれた図形を S とする.

(1) S を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ. (3 点)



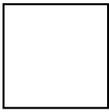
(2) C の上半分 D の媒介変数表示

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos t \\ y(t) &= b \sin t \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

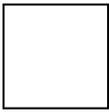
を考える. D の長さを l とするとき,

$$l = \int_0^\pi \boxed{} dt$$

である. この空欄を a, b, t を用いた式で埋めよ. (3 点)



(3) $a = b$ のとき, $l = \pi a = \pi b$ であることを示せ. (2 点)



(4) $a \geq b$ のとき, $\pi a \geq l \geq \pi b$ であることを示せ. (2 点)