

微分積分学I 期末試験問題(2010年7月)

氏名

学籍番号

1. 以下の不定積分を求めよ。

(1) $\int \tan x dx$ (5点)

(2) $\int x^2 e^x dx$ (10点)

2. $t = \tan x$ と置く置換積分により、以下の不定積分を求めよ。(10点)

$$\int \frac{1}{4 \cos^2 x + \sin^2 x} dx$$

3. 連続な関数 $f(x)$ が偶関数、すなわち $f(x) = f(-x)$, であるとき、

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

が成立することを、積分区間を $[-a, 0]$ と $[0, a]$ に分けて、 $t = -x$ と置く置換積分を行うことにより示せ。(5点)



4. $0 \leq x \leq 1$ で定義された連続な関数 $f(x)$ に対して、定積分の公式として、

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$$

が成立する。不定積分を用いず、この公式を用いることにより、定積分 $\int_0^1 xdx$ の値を

求めよ。ただし $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ であることを使ってよい。(10点)



5. 以下の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$ (8点)

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ (8点)

(3) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ (6点)

6. $t = \sqrt{1+x}$ と置き、置換積分法を用いて定積分 $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx$ の値を求めよ。(10点)

7. 定積分 $\int_0^1 \log x dx$ の値を求めよ。ただし、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$ であることを使ってよい。(10点)

8. 曲線 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($0 \leq x \leq 1$) の長さを求めよ。(8点)

9. 二つの曲線 $y = 2 - x^2$ と $y = |x|$ で囲まれた部分について以下の問いに答えよ。

- (1) この部分の面積 S を求めよ。(6点)

- (2) この図形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。(4点)