微分積分学 II　期末試験問題 (２０１１年２月)

氏名

学籍番号

1.　領域 $D = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 \leqq 1\}$ で定義された 2 変数関数を $f(x, y) = x^2 + 4xy - 2y^2$ として、次の問に答えよ。（計 20 点）

(1)　D の内部の点での $f(x, y)$ の極値を与える候補点とその点での値を求めよ。(3 点）

(2)　D の境界を表す式を $g(x, y) = 0$ とするとき、$g(x, y)$ を記述せよ。(3 点）

(3)　ラグランジュの未定乗数法を用いて、D の境界上の極値を与える点を求める方程式を記述せよ。(4 点）

(4)　領域 D における $f(x, y)$ の最大値と最小値を与える点及びそれらの値を求めよ。(10 点）

2.　次の各問の領域 D を図示し、2 重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ を累次積分で表せ。（各 6 点 計 12 点）

(1)　$y = e^x$、$y = 2$、および y 軸により囲まれた領域 D。

(2)　放物線 $4y = x^2$ と直線 $x - 2y + 4 = 0$ に囲まれた領域 D。

3.　次の問に答えよ。（各 6 点 計 18 点）

(1)　累次積分 $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx$ の積分順序を交換せよ。

(2)　累次積分 $\int_0^2 \left(\int_y^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx \right) dy$ の積分順序を交換せよ。

(3)　積分順序の交換を用いて、累次積分 $\int_0^1 \left(\int_x^1 ye^{y^3} dy \right) dx$ を求めよ。

4. 領域 $D=\{(x,y)|\ 0 \leqq x+y \leqq 2,\ \ 0 \leqq x-y \leqq 1\ \}$ での２重積分 $\iint_D y\ dxdy$ を変数変換を行って求めることを考える。このとき、次の空白を埋めよ。（各２点 計 10 点）

この積分を計算するために、変数変換 [① $u=$ 　　　　, $v=$ 　　　　] を行う。このとき積分領域 D' は $D'=\{(u,v)|$ [② 　　　　　　　　　　] $\}$ となる。また、ヤコビアンは [③ 　　　　　] と求められる。したがって２重積分は $\iint_{D'}$ [④ 　　　　　　　　] $dudv$ と書き換えることができる。これを計算して積分値は [⑤ 　　　] と求められる。

5. 与えられた積分領域 D に対し、変数変換を行って次の２重積分を求めよ。（計 10 点）

(1) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D=\{(x,y)|\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ （5 点）

(2) $\iint_D y^2dxdy,\ D=\{(x,y)|\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\ \}$ （5 点）

6. 積分領域 $D=\{(x,y)|\ x \geqq 0,\ 1 \leqq xy \leqq 2,\ 2 \leqq 2x-y \leqq 3\ \}$ に対して変数変換を行い、２重積分 $\iint_D (4x^2-y^2)dxdy$ を求めよ。（10 点）

7.　２つの球 $q_1 : x^2 + y^2 + (z + a/2)^2 \leqq a^2$、$q_2 : x^2 + y^2 + (z - a/2)^2 \leqq a^2$ $(a > 0)$ の共通部分の体積を求めたい。以下の問いに答えよ。（計 20 点）

(1) 共通部分上部の曲面は q_1 上部の曲面となる。これを $z = g(x, y)$ とするとき $g(x, y)$ を求めよ。（4 点）

(2) 共通部分下部の曲面は q_2 下部の曲面となる。これを $z = f(x, y)$ とするとき $f(x, y)$ を求めよ。（4 点）

(3) $z = f(x, y)$ と $z = g(x, y)$ の交わる曲線を求めよ。（6 点）

(4) 共通部分の体積を求めよ。（6 点）