

微分積分学 II 期末試験問題 (2011年2月)

氏名 \_\_\_\_\_

学籍番号 \_\_\_\_\_

1. 領域  $D = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 \leq 1\}$  で定義された 2 変数関数を  $f(x, y) = x^2 + 4xy - 2y^2$  と  
して、次の問に答えよ。(計 20 点)

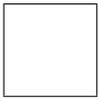
(1)  $D$  の内部の点での  $f(x, y)$  の極値を与える候補点とその点での値を求めよ。(3 点)

(2)  $D$  の境界を表す式を  $g(x, y) = 0$  とするとき、 $g(x, y)$  を記述せよ。(3 点)

(3) ラグランジュの未定乗数法を用いて、 $D$  の境界上の極値を与える点を求める方程式を  
記述せよ。(4 点)

(4) 領域  $D$  における  $f(x, y)$  の最大値と最小値を与える点及びそれらの値を求めよ。(10 点)

2. 次の各問の領域  $D$  を図示し、2重積分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  を累次積分で表せ。(各6点計12点)



(1)  $y = e^x$ 、 $y = 2$ 、および  $y$  軸により囲まれた領域  $D$ 。



(2) 放物線  $4y = x^2$  と直線  $x - 2y + 4 = 0$  に囲まれた領域  $D$ 。

3. 次の問に答えよ。(各6点計18点)



(1) 累次積分  $\int_0^1 \left( \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$  の積分順序を交換せよ。



(2) 累次積分  $\int_0^2 \left( \int_y^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right) dy$  の積分順序を交換せよ。



(3) 積分順序の交換を用いて、累次積分  $\int_0^1 \left( \int_x^1 ye^{y^3} dy \right) dx$  を求めよ。

4. 領域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 2, 0 \leq x - y \leq 1\}$  での2重積分  $\iint_D y \, dx dy$  を変数変換を行って求めることを考える。このとき、次の空白を埋めよ。(各2点計10点)

この積分を計算するために、変数変換 [①  $u =$  \_\_\_\_\_ ,  $v =$  \_\_\_\_\_ ] を行う。このとき積分領域  $D'$  は  $D' = \{(u, v) \mid$  [② \_\_\_\_\_ ]  $\}$  となる。また、ヤコビアンは [③ \_\_\_\_\_ ] と求められる。したがって2重積分は  $\iint_{D'} [④$  \_\_\_\_\_  $] du dv$  と書き換えることができる。これを計算して積分値は [⑤ \_\_\_\_\_ ] と求められる。

5. 与えられた積分領域  $D$  に対し、変数変換を行って次の2重積分を求めよ。(計10点)

(1)  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 1\}$  (5点)

(2)  $\iint_D y^2 dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$  (5点)

6. 積分領域  $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, 1 \leq xy \leq 2, 2 \leq 2x - y \leq 3\}$  に対して変数変換を行い、2重積分  $\iint_D (4x^2 - y^2) dx dy$  を求めよ。(10点)

7. 2つの球  $q_1 : x^2 + y^2 + (z + a/2)^2 \leq a^2$ 、 $q_2 : x^2 + y^2 + (z - a/2)^2 \leq a^2$  ( $a > 0$ ) の共通部分の体積を求めたい。以下の問いに答えよ。(計 20 点)

(1) 共通部分上部の曲面は  $q_1$  上部の曲面となる。これを  $z = g(x, y)$  とするとき  $g(x, y)$  を求めよ。(4 点)

(2) 共通部分下部の曲面は  $q_2$  下部の曲面となる。これを  $z = f(x, y)$  とするとき  $f(x, y)$  を求めよ。(4 点)

(3)  $z = f(x, y)$  と  $z = g(x, y)$  の交わる曲線を求めよ。(6 点)

(4) 共通部分の体積を求めよ。(6 点)