微分積分学Ｉ　期末試験問題 (２０１１ 年７月)

氏名

学籍番号

1.　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$（6 点）

(2) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$（6 点）

(3) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$　（ヒント：$x^2+1=t$ と置く）（6 点）

(4) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$（6 点）

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx$（6 点）

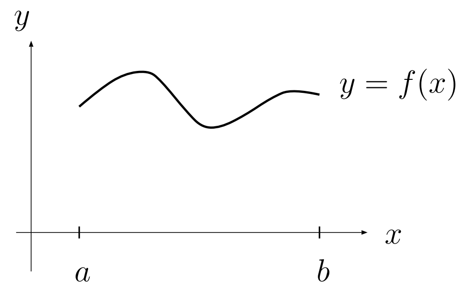
2.　次の問に答えよ。

(1)　a は正の定数とする。$x = a\tan t$ (すなわち $t = \tan^{-1}(x/a)$) と置き、置換積分法を用いて、公式 $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ を導け。（5 点）

(2)　(1) で導いた公式を参考にして、不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$ を求めよ。（5 点）

3.　区間 $a \leqq x \leqq b$ で定義された連続関数 $f(x)$ について、次の問に答えよ。ただし、定義域において、$f(x) \geqq 0$ とする。

(1)　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ がどんな図形の面積を表すかを図示せよ。（3 点）



(2)　関数 $f(x)$ の定義域上での最大値を M、最小値を m とする。このとき、不等式

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a)$$

が成り立つことを、図を用いて説明せよ。（3 点）

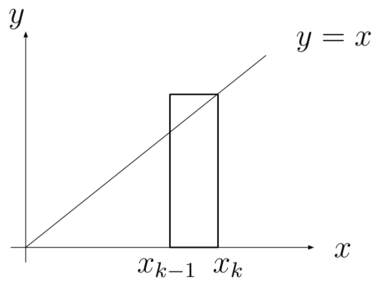
4.　区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 等分したときの分割点を

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

とする。次の問に答えよ。

(1)　分割点 x_k $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ を $n,\ k$ を用いて表せ。（2 点）

(2)　図のように、区間 $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ $(k = 1,\ \ldots,\ n)$ を底辺に持ち、高さが x_k の長方形を考える。この長方形の面積 A_k を $n,\ k$ を用いて表せ。（2 点）



(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} A_k$ を求めよ。ただし、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ であることを用いてよい。（4 点）

5.　次の問に答えよ。

(1)　$f(x)$ が微分可能のとき、部分積分の公式より、

$$\int f(x)\,dx = \boxed{\quad\quad\quad} - \int x f'(x)\,dx$$

である。この空欄を x と $f(x)$ を用いた式で埋めよ。（5 点）

(2)　(1) を参考にして、定積分 $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$ を求めよ。（5 点）

6.　次の定積分の値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\,dx$（6 点）

(2) $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$（6 点）

$\boxed{}$

(3) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{(\log x)^3}{x}\,dx$（6 点）

$\boxed{}$

(4) $\displaystyle\int_0^3 |x-1|\,dx$（6 点）

$\boxed{}$

(5) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$　(ヒント：$\sqrt{x}=t$ と置く)（6 点）

$\boxed{}$

7. $A_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ とする。これを $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx$ と見て、部分積分を用いることにより、次の漸化式が成り立つことを証明せよ。（6 点）

$$A_n=\frac{n-1}{n}A_{n-2}\quad(n\geqq 2)$$

$\boxed{}$