2007年11月28日　　**微分積分学II 中間試験**

学籍番号 ________________ 氏名 ________________

1. 以下の極限値が存在するか調べ、存在する場合は極限値を求めよ。

1.(1)

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (5点)

1.(2)

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+2y^2}$ (5点)

2. 次の関数の連続性を調べよ。(10点)

2.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 1 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

3. $z=\log\sqrt{x^2+y^2} \quad ((x,y)\neq(0,0))$ について以下の小問に答えよ。

(1) 偏導関数 z_x、z_y を求めよ。(5点)

3.(1)

3.(2)

(2) 全微分可能か調べ、全微分可能なら全微分を求めよ。(5 点)

3.(3)

(3) 点 $(1,1,\log\sqrt{2})$ における接平面の式を求めよ。（5 点）

4. $z=f(x,y)$ が全微分可能な関数で、x,y が r,θ の関数

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

であるとき、次の等式が成り立つことを証明するように、空欄 [　　] を埋めよ。

4.

（各 4 点　計 20 点）

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

[証明]

$x=x(r,\theta), y=y(r,\theta)$ は偏微分可能であるから、2 変数の合成関数 $z=f(x(r,\theta),y(r,\theta))$ に対して偏微分の公式を用いると

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=[\qquad\qquad] \tag{1}$$

同様に

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=[\qquad\qquad]=[\qquad\qquad] \tag{2}$$

(2) 式より

$$\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}=[\qquad\qquad] \tag{3}$$

(1) 式と (3) 式の両辺を 2 乗して加えると

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right]$$

5. 関数 $f(x,y)=e^x\log(1+y)$ に対して、以下の [ ] を埋めよ。

5.(1)

(1) (各 2 点、計 10 点)

$f_x(x,y)=[\qquad\qquad\qquad]$, $f_y(x,y)=[\qquad\qquad\qquad]$

$f_{xx}(x,y)=[\qquad\qquad\qquad]$, $f_{xy}(x,y)=[\qquad\qquad\qquad]$

$f_{yy}(x,y)=[\qquad\qquad\qquad]$

である。

(2) これらより、次のものを求めることができる。(各 5 点、計 10 点)

5.(2)

$(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})f(0,0)=[\qquad\qquad\qquad]$

$(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})^2f(0,0)=[\qquad\qquad\qquad]$

(3) 以上より、この関数に対する x,y の 2 次までのマクローリン展開は

5.(3)

[ ]

となる。(5 点)

6. 次の関数の極値が存在すれば求めよ。

6.(1)

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ (5 点)

6.(2)

(2) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ (5 点)

7. 関数 $f(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy + 2fx + 2gy + h$ が極小値を持てば、その値は最小値であり、極大値を持てば、その値は最大値であることを示せ。(5 点)

7.

8. ラグランジュの乗数法を用いて、$x^2 + y^2 + 2xy = 1$ のとき、$f(x, y) = x^2 + y^2$ が極値をとる候補点を求めよ。(5 点)

8.