微分積分学 II　中間試験問題 (２００８年１１月)

氏名 ____________________

学籍番号 ____________________

1. 以下の極限値が存在するか調べ、存在する場合には極限値を求めよ。

   (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-3y}{x+2y}$ （６点）

   (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ （６点）

2. 次の関数が点 $(0,0)$ で連続となるような定数 a の値は存在するか。そのことを調べ、存在する場合にはその値を求めよ。（１０点）

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & : (x,y) \neq (0,0) \\ a & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3. 関数 $z = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$ の偏導関数 z_x、z_y を求めよ。（８点）

4. 関数 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ の全微分を求めよ。（７点）

5. 曲面 $z = -x^2 - 2y^2$ の上の点 $(2, 1, -6)$ における接平面の方程式を求めよ。（７点）

6. 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能な関数で、x, y が r, θ の関数

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

であるとき、等式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots \ (*)$$

が成り立つ。これを、以下の手順にしたがって証明せよ。

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial x}{\partial r}, \dfrac{\partial x}{\partial \theta}, \dfrac{\partial y}{\partial r}, \dfrac{\partial y}{\partial \theta}$ を求めよ。（各１点、計４点）

(裏面へつづく)

(2) 2 変数の合成関数 $z = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$ に対する偏微分の公式、および、問 (1) の結果より、$\dfrac{\partial z}{\partial r}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を、$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, r, \cos\theta, \sin\theta$ を用いて書き表せ。（各４点、計８点）

(3) 問 (2) の結果を $\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ へ代入し、等式 $(*)$ が成り立つことを示せ。（８点）

7. 方程式 $x^3 + y^3 = 3xy$ で定まる陰関数に対し、その導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。（７点）

8. 関数 $f(x,y) = \log(1 + x + y^2)$ に対し、以下の問いに答えよ。

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ。（各２点、計１０点）

(2) 次を求めよ。（各７点、計１４点）

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0),\quad \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$$

(3) 関数 $f(x,y)$ の２変数のマクローリン展開を、x, y の２次の項まで求めよ。（５点）