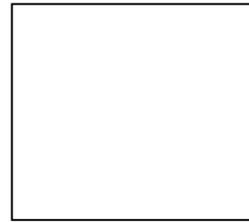


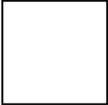
微分積分学 II 中間試験(2009 年 11 月)

学籍番号 _____

氏名 _____



1. 以下の極限が存在するか調べ、存在する場合には極限を求めよ。



(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$ (5 点)

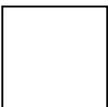


(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sin(x-y)}{x-y}$ (5 点)



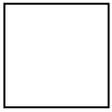
2. 次の関数の偏導関数 $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$ を求めよ。(8 点)

$$f(x, y) = \frac{x^y}{e^x - e^y} \quad (x > 0)$$



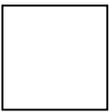
3. 次の曲面 $z = f(x, y)$ の点(1,2,4)における接平面の方程式を求めよ。(6 点)

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$$



4. 次の関数 $z = f(x, y)$ の全微分可能性を調べよ。(6 点)

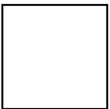
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



5. 次の合成関数 $F(t) = f(x(t), y(t))$ の導関数を求めよ。(7 点)

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad x(t) = t - 1, \quad y(t) = \frac{2}{t}$$

6. 次の合成関数 $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ の偏導関数を求めよ。(4 点)



$$f(x, y) = e^x \cos y, \quad x(u, v) = u^2 - v^2, \quad y(u, v) = 2uv$$

7. $z = f(x, y)$, $x(u, v) = u \cos \alpha - v \sin \alpha$, $y(u, v) = u \sin \alpha + v \cos \alpha$ のとき、次式が成り立つことを示せ。ただし α は定数とする。(7点)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

8. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ のとき、 $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ が成り立つことを示せ。(7点)

9. 関数 $f(x, y) = e^{2x} \cos 3y$ について以下の問いに答えよ。

(1) 偏微分係数 $f_x(0,0), f_y(0,0), f_{xx}(0,0), f_{xy}(0,0), f_{yy}(0,0)$ をそれぞれ求めよ。(6点)

(2) (1)の結果を利用して、第3次マクローリン展開を求めよ。ただし剰余項は $R_3(x, y)$ とだけ記し具体的な形は求める必要はない。(4点)

10. 関数 $f(x,y) = e^{x^2+y^2-2y+1}$ について以下の問いに答えよ。

(1) 第2次偏導関数 $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yy}(x,y)$ をそれぞれ求めよ。(8点)

(2) $f(x,y)$ の停留点があればすべて求めよ。(4点)

(3) $f(x,y)$ の極大値または極小値があればすべて求めよ。(6点)

11. 等高線 $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$ から定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 導関数 $\varphi'(x)$ を x, y を使った式で表せ。(5点)

(2) 点 $(2,1)$ における接線の方程式を求めよ。(5点)

(3) その点における接線の傾きが(2)の接線と等しくなる別の点が等高線上にある。その点の座標を求めよ。(7点)