微分積分学　　中間試験問題(２０１０年１２月)

氏名

学籍番号

1.　次の関数の極限が存在するかどうかを調べ、存在する場合は極限値を求めよ。（各 4 点、計 8 点）

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

2.　次の二変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求めよ。（f_x, f_y について各 2 点、計 8 点）

(1) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^3$

(2) $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

3.　次の関数の全微分を求めよ。（各 4 点、計 8 点）

(1)　$z = f(x, y) = e^x \sin y$

(2)　$z = f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

4.　曲面 $z = f(x, y) = x^2 + 3y^2$ の上の点 $(1, 1, 4)$ における接平面の方程式を求めよ。（6 点）

5.　全微分可能な関数 $z = f(x, y) = xy$ について下記の問題に答えよ。（各 6 点、計 12 点）

(1)　$x = u + v, y = 5u + 3v$ のとき、$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ。

(2)　$x = \cos\theta, y = \sin\theta$ のとき、$\dfrac{dz}{d\theta}$ を求めよ。

6.　二変数関数 $z = \log(x^2 + y^2)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を求めよ。(6 点)

7.　二変数関数 $f(x, y) = e^{-x} \cos y$ について以下の問いに答えよ。

(1)　偏導関数 $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yy}(x, y)$ をそれぞれ求めよ。(6 点)

(2)　$f(x, y)$ の Maclaurin(マクローリン) 展開を 2 次の項まで求めよ。(6 点)

8.　二変数関数 $f(x, y) = \tan(x - y)$ の Maclaurin 展開を、$f(x, y)$ を $f(x, y) = g(t) = \tan t$ と $t = h(x, y) = x - y$ の合成関数とみなして 3 次の項まで求めよ。(10 点)

9.　方程式 $x^2 + y^2 - e^{xy} = 0$ で定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在する。このとき $\dfrac{dy}{dx}$ を x と y を使った式で表せ。(6 点)

10. 二変数関数 $f(x,y)=x^2-2xy+2y^2-4x$ の極値を求めるため、空欄に適当な数式、数値、座標または語句を入れよ。(⑦については計算結果と正負の判定を合わせて示せ(例：$-1<0$)。⑧は『>0』、『<0』のどちらかを選択せよ。)（各 1 点：計 10 点）

まず、$f(x,y)$ の第一次偏導関数を求めると、$f_x(x,y)=$ [①]、$f_y(x,y)=$ [②]。$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ となる点は、$(x,y)=$ [③]。これは極値をとる候補点となる。次に、第二次偏導関数を求めると、$f_{xx}(x,y)=$ [④]、$f_{xy}(x,y)=$ [⑤]、$f_{yy}(x,y)=$ [⑥]。判別式、$\Delta(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-(f_{xy}(x,y))^2$ を用いて、候補点③における極値の判定条件を調べると、$\Delta(x,y)=$ [⑦] かつ $f_{xx}(x,y)$[⑧：$>0,<0$] であるから、候補点③は [⑨] 値となり、その値は [⑩] である。

11. 次の二変数関数 $f(x,y)$ について極値をとる候補点を求め、極値が存在すればその値を求めよ。（14 点）

(1) $f(x,y)=ax^2-12y+y^3$ (a は負の定数)（7 点）

(2) $f(x,y)=ye^{-(x^2+y^2)}$（7 点）