微分積分学 II　試験問題 (２０１１年１１月３０日)

氏名

学籍番号

1. 次の文章中の括弧内に適当な式を入れよ。（各２点）

(1) 点列 (a_n, b_n) が点 (a, b) に収束することは、
$\lim_{n\to\infty}$ (　　　　　　　　　　　　　　)$= 0$ と定義される。

(2) 関数 $f(t)$ と $t = g(x, y)$ の合成関数を $z(x, y) = f(g(x, y))$ とする。$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $f(t)$ の導関数および $g(x, y)$ の偏導関数を用いて表すと $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ =(　　　　　　　　　　　　　　) となる。

(3) 関数 $f(x, y)$ と $x = x(t),\ y = y(t)$ の合成関数を $z(t) = f(x(t), y(t))$ とする。
$\dfrac{dz}{dt}$ を $f(x, y)$ の偏導関数および $x(t),\ y(t)$ の導関数を用いて表すと
$\dfrac{dz}{dt}$ =(　　　　　　　　　　　　　　) となる。

(4) 関数 $f(s, t)$ と $s = s(x, y),\ t = t(x, y)$ の合成関数を $z(x, y) = f(s(x, y), t(x, y)))$ とする。$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $f(s, t)$ および $s = s(x, y),\ t = t(x, y)$ の偏導関数 を用いて表すと
$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ =(　　　　　　　　　　　　　　) となる。

2. 次の極限が存在するか調べ、存在する場合は極限値を求めよ。（各４点）

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 + xy - x - y}{x - 1}$

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(3) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + 2y^2}$

(4) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

3.　次の問いに答えよ。((1)、(2) 各４点、(3) ６点)

(1) 二変数関数 $f(x,y) = xy\cos(xy)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ。

(2) 二変数関数 $f(x,y) = y^3\log(x^2+y^4)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ。

(3) 二変数関数 $f(x,y) = e^{x^2+2y}$ の 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ をそれぞれ求めよ。

4.　次の問いに答えよ。((1)、(2) 各２点、(3)、(4) 各４点)

(1) 二変数関数 $z = xy$ において、$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$ を代入することにより、$\dfrac{dz}{d\theta}$ を求めよ。

(2) 二変数関数と一変数関数の合成関数の微分の公式を用いて、$z = xy$ と、
$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$ の合成関数の導関数 $\dfrac{dz}{d\theta}$ 求め、(1) の結果と
同じになることを確かめよ。

(3) 二変数関数 $z = xy$ において、$x = u + v,\ y = 5u + 6v$ のとき、合成関数の微分の公式を用いて $\dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ。

(4) $f(t) = e^t\sin t,\ t = t(x,y) = x^2 + y^2$ の合成関数 $z(x,y) = f(t(x,y))$ の x, y に関する偏導関数をそれぞれ求めよ。

5. 曲面 $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 上の点 $(\sqrt{2}, 1, f(\sqrt{2}, 1))$ で接平面および xz 平面に平行な接線の式を求めよ。（１０点）

6. 次の関数 $f(x, y)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ。（各５点）

(1) $f(x, y) = \log(1 + x + y^2)$

(2) $f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y)$

7. 次の関数 $f(x, y)$ の極値があれば求めよ。（各５点）

(1) $f(x, y) = x^2 - \dfrac{y^2}{2}$

(2) $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$

8. $f(x,y)=x^3+y^3-6xy=0$ とするとき次の問いに答えよ。((1)、(2) 各３点、(3) ４点)

(1) 点 $(a,b)=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$ とする。点 (a,b) が曲線 $f(x,y)=0$ 上にあることを示せ。

(2) 点 (a,b) が曲線 $f(x,y)=0$ 上の特異点（$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点）でないことを示せ。

(3) 点 (a,b) における曲線 $f(x,y)=0$ の接線の方程式を求めよ。

9. 関数 $f(x,y)=e^{x\cos y}\sin x\ (0\leqq x\leqq 2\pi, 0\leqq y\leqq \pi)$ について、次の問いに答えよ。（各５点）

(1) 点 (x,y) で $f(x,y)$ が極値をとれば、$\sin y=0$ であることを示せ。

(2) 関数 $f(x,y)$ の極大値および極小値を求めよ。